

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 073

Titolo nota

17/11/2011

Integrazione per parti + percorso + grande ritorno $\Rightarrow$ primitive del tipo

$$\int \cos^k x dx$$

$$\int \sin^k x dx$$

Ad ogni passaggio
l'esponente scende di 2.

Esempio 1 $\int \sin^4 x dx = \int \sin^3 x \cdot \sin x dx$

F g

$$= \sin^3 x \cdot (-\cos x) - \int 3 \sin^2 x \cdot \cos x (-\cos x) dx$$

F G f G

$$= -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x dx - 3 \int \sin^4 x dx$$

$\underbrace{1 - \sin^2 x}$ $\underbrace{\text{grande rit.}}$

$$4 \int \sin^4 x dx = -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \sin x \cos x$$

$\underbrace{\text{fatto prima per parti}}$

Metodo alternativo per la primitiva di $\sin^4 x$: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, quindi

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \int \left\{ \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \cos(2x) \right\}$$

controllare che
coincida con quella
prima!

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x \Rightarrow \int \cos^2(2x) = \left[\frac{2x}{2} + \frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) \right] \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \cos(2x)$$

Esempio 2 $\int \underset{F}{\cos(2x)} \cdot \underset{g}{e^{3x}} dx = \cos(2x) \cdot \underset{F}{\frac{1}{3}} \underset{G}{e^{3x}} - \int \underset{f}{(-2 \sin(2x))} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3}} e^{3x} dx$

$$= \frac{1}{3} \cos(2x) \cdot e^{3x} + \frac{2}{3} \int \underset{F}{\sin(2x)} \cdot \underset{g}{e^{3x}} dx$$

$\underset{g}{F} \rightsquigarrow$ si torna indietro: provare!

$$= \frac{1}{3} \cos(2x) \cdot e^{3x} + \frac{2}{3} \left\{ \underset{F}{\sin(2x)} \underset{G}{\frac{1}{3}} e^{3x} - \int \underset{f}{2 \cos(2x)} \underset{G}{\frac{1}{3}} e^{3x} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \cos(2x) \cdot e^{3x} + \frac{2}{9} \sin(2x) e^{3x} - \underbrace{\frac{4}{9} \int \cos(2x) \cdot e^{3x} dx}_{\text{grande ritorno}}$$

Portando a sinistra ottengo

$$\frac{13}{9} \int \cos(2x) \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{3} \cos(2x) \cdot e^{3x} + \frac{2}{9} \sin(2x) \cdot e^{3x}$$

$$\Rightarrow \int \cos(2x) \cdot e^{3x} dx = \left(\frac{3}{13} \cos(2x) + \frac{2}{13} \sin(2x) \right) \cdot e^{3x} \quad \text{verifica !!!}$$

Allo stesso modo (grande ritorno dopo 2 passaggi per parti) si fanno tutte le primitive del tipo

$$\boxed{\int \sin(ax) e^{bx} dx}, \quad \boxed{\int \cos(ax) e^{bx} dx}, \quad \boxed{\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) \cdot e^{cx} dx}$$

Oss. Usando le formule trigonometriche PRODUCT TO SUM è possibile trasformare i prodotti $\sin(ax) \cdot \cos(bx)$ in somme di funzioni trigonometriche, che poi si integrano.
Lo stesso trucco permette di fare primitive del tipo

$$\boxed{\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx} \quad \boxed{\int p(x) \cdot \sin(ax) \cdot \cos(bx) dx}$$

prima product $\rightarrow$ sum e poi integrazione per parti.

TRUCCO DELL'1 NASCOSTO

$$\text{Esempio 3} \quad \int \log x \, dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{f}{\log x} = \underset{g}{x} \cdot \underset{f}{\log x} - \int \underset{g}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x = x(\log x - 1)$$

$$\text{Verifica: } [x \log x - x]' = \log x + \cancel{x \cdot \frac{1}{x}} - \cancel{1} = \log x$$

$$\text{Esempio 4} \quad \int \log(5x) \, dx = \underbrace{5x (\log(5x) - 1)}_{\text{quello di prima}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{compensa la derivata di } 5x} = x(\log(5x) - 1)$$

$$\text{Verifica: } [x \log(5x) - x]' = \log(5x) + x \cdot \cancel{\frac{1}{5x} \cdot 5} - \cancel{1} = \log(5x)$$

Oss. $[\log(5x)]' = \frac{1}{x}$ e non stupisce perché $\log(5x) = \log 5 + \log x$

$$\text{Esempio 5} \quad \int \arctan x \, dx = \int \underset{g}{1} \cdot \underset{f}{\arctan x} \, dx$$

$$= \underset{g}{x} \cdot \underset{f}{\arctan x} - \int \underset{g}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

$$= x \arctan x - \log \sqrt{1+x^2}$$

Allo stesso modo si fanno le primitive del tipo

$$\boxed{\int p(x) \cdot \log x \, dx}$$

$$\boxed{\int p(x) \cdot \arctan x \, dx}$$

Il polinomio $p(x)$ si integra, $\log x$ o $\arctan x$ si derivano.

Esempio 6 $\int \underset{g}{x} \cdot \underset{f}{\log^2 x} dx = \underset{G}{\frac{x^2}{2}} \underset{F}{\log^2 x} - \int \underset{G}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{f}{2 \log x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} dx$

$$= \underset{g}{\frac{1}{2} x^2} \underset{f}{\log^2 x} - \int \underset{g}{x} \underset{f}{\log x} dx$$

$$= \underset{g}{\frac{1}{2} x^2} \underset{f}{\log^2 x} - \left\{ \underset{G}{\frac{x^2}{2}} \underset{F}{\log x} - \int \underset{G}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{f}{\frac{1}{x}} dx \right\}$$

$$= \underset{g}{\frac{1}{2} x^2} \underset{f}{\log^2 x} - \underset{g}{\frac{1}{2} x^2} \underset{f}{\log x} + \underset{g}{\frac{1}{2}} \int x dx$$

$$= \underset{g}{\frac{1}{2} x^2} \underset{f}{\log^2 x} - \underset{g}{\frac{1}{2} x^2} \underset{f}{\log x} + \underset{g}{\frac{1}{4}} x^2 \quad \text{Verifica!}$$

Allo stesso modo $\boxed{\int p(x) \cdot \log^k x dx}$ Il log si deriva!

Esempio 7 $\int \tan x dx = \int \underset{g}{\frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \underset{g}{\sin x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{\cos x}} dx =$

$$= \underset{G}{-\cos x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{G}{(-\cos x)} \cdot \underset{f}{\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)} \underset{f}{(-\sin x)} dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -1 + \int \tan x dx$$

Ho ottenuto che $\int \tan x dx = -1 + \int \tan x dx$ ☹️

Ho applicato correttamente la formula "abusiva" !!!

Esempio analogo: $\int 1 dx = \int \underset{F}{e^x} \cdot \underset{g}{e^{-x}} dx = \text{provare che succede !!!}$