

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 072

Titolo nota

17/11/2011

INTEGRAZIONE PER PARTI

Idea di partenza: una primitiva di una derivata è la funzione stessa

$$\int_a^b \Phi'(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Scegliamo $\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$. Allora $\Phi'(x) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) G'(x)$.
Ponendo $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$ otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) G(x) + F(x) g(x)\} dx &= [F(x) G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x) G(x) dx + \int_a^b F(x) g(x) dx \end{aligned}$$

Portando uno degli integrali al 2° membro otteniamo

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = [F(x) G(x)]_a^b - \int_a^b f(x) G(x) dx$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI "UFFICIALE"

$$\int F g = F G - \int f G$$

Formula di integrazione per parti "abusiva"

Operativamente si tratta di scrivere l'integrande come prodotto di una F per una g : nel seguito bisognerà derivare F e integrare g .

È quindi utile scegliere una F che "derivando migliori" ed una g di cui si sappia fare la primitiva.

Esempio 1

$$\int \underset{F}{x} \underset{g}{e^{3x}} dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3}e^{3x}} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3}e^{3x}} dx$$

$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$$

Verifica della primitiva: $\left[\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right]' = \cancel{\frac{1}{3} e^{3x}} + \cancel{\frac{1}{3} x \cdot 3e^{3x}} - \cancel{\frac{1}{3} e^{3x}} = x e^{3x}$

Esempio 2

$$\int \underset{F}{x} \underset{g}{\cos(2x)} dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} \sin(2x)} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2} \sin(2x)} dx$$

$$= \frac{1}{2} x \sin(2x) - \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) \quad \text{VERIFICA...}$$

Esempio 3

$$\int \underset{F}{x^2} \underset{g}{\sin(3x)} dx = \underset{F}{x^2} \left(\underset{G}{-\frac{1}{3} \cos(3x)} \right) - \int \underset{f}{2x} \left(\underset{G}{-\frac{1}{3} \cos(3x)} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{3} \int x \cos(3x) dx$$

Calcolo a parte $\int \underset{F}{x} \underset{g}{\cos(3x)} dx = \underset{F}{x} \underset{G}{\frac{1}{3} \sin(3x)} - \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\frac{1}{3} \sin(3x)} dx$

$$= \frac{1}{3} x \sin(3x) - \frac{1}{3} \int \sin(3x) dx = \frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x)$$

Mettendo insieme i pezzi otteniamo che

$$\int x^2 \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) + \frac{2}{27} \cos(3x)$$

Verifica: $\left[\right]' = \cancel{-\frac{2}{3} x \cos(3x)} + \cancel{x^2 \sin(3x)} + \cancel{\frac{2}{9} \sin(3x)} + \cancel{\frac{2}{3} x \cos(3x)} - \cancel{\frac{2}{9} \sin(3x)}$

Con lo stesso metodo si calcolano primitive del tipo ($p(x)$ = polinomio)

$$\int p(x) e^{ax} dx$$

$$\int p(x) \cos(ax) dx$$

$$\int p(x) \sin(ax) dx$$

Esempio 4 $\int (x+3) \cdot 5^x dx = \int \underset{F}{(x+3)} \underset{g}{e^{\log 5 \cdot x}} dx =$

$$= \underset{F}{(x+3)} \underbrace{\frac{1}{\log 5} \cdot e^{\log 5 \cdot x}}_G - \int \underset{f}{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\log 5}}_G \cdot e^{\log 5 \cdot x} dx$$

$$= \underset{F}{(x+3)} \frac{1}{\log 5} \cdot 5^x - \frac{1}{\log 5} \int \underset{f}{e^{\log 5 \cdot x}} dx = \frac{1}{\log 5} \underset{F}{(x+3)} \cdot 5^x - \frac{1}{\log^2 5} \cdot 5^x$$

— o — o — o —

GRANDE RITORNO

Esempio 5 $\int \cos^2 x dx = \int \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{g}{\cos x} dx = \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{G}{\sin x} - \int \underset{f}{(-\sin x)} \cdot \underset{G}{\sin x} dx$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x dx$$

1^a idea: $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x = F \cdot g$, ma così torno da capo (provare!)

2^a idea: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (precorso!). Otteniamo che

$$\int \cos^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x - \underbrace{\int \cos^2 x dx}_{\text{grande ritorno!}}$$

$$2 \int \cos^2 x dx = \cos x \cdot \sin x + x \Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x$$

Esempio 6 $\int \sin^2 x dx = \int \underset{F}{\sin x} \cdot \underset{g}{\sin x} dx = \underset{F}{\sin x} \cdot \underset{G}{(-\cos x)} - \int \underset{f}{\cos x} \cdot \underset{G}{(-\cos x)} dx$

$$= -\sin x \cdot \cos x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{= 1 - \sin^2 x} dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \underbrace{\int \sin^2 x dx}_{\text{grande ritorno}}$$

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + x \Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x$$

Oss. $\int \cos^2 x \, dx + \int \sin^2 x \, dx = x$, il che non stupisce perché $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

— 0 — 0 —

Modo alternativo per integrare $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$

Precorso: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Da queste si ottiene:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) = \text{volendo...} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x \end{aligned}$$

Idem per $\sin^2 x$

Esempio 7 $\int \cos^3 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_g \cdot \underbrace{\cos^2 x}_F \, dx = \underbrace{\sin x}_g \cdot \underbrace{\cos^2 x}_F + \int \underbrace{\sin x}_g \cdot \underbrace{2 \cos x \sin x}_{f'} \, dx$

$$\begin{aligned} &= \sin x \cos^2 x + 2 \int \cos x \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{1 - \cos^2 x} \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x - \cos^3 x \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x - \underbrace{2 \int \cos^3 x \, dx}_{\text{grande ritorno}} \end{aligned}$$