

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 071

Titolo nota

16/11/2011

Calcolo operativo di integrali Per calcolare $\int_a^b f(x) dx$ cerco una funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

cioè una primitiva, quindi calcolo

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Questo motiva la ricerca di tecniche per determinare le primitive.

Primitive elementari: leggere la tabellina delle derivate al contrario.

Notazione $\int f(x) dx$ = una primitiva qualunque di $f(x)$
integrali senza estremi

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, \quad \int 1 dx = x$$

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \quad \text{per } k \in \mathbb{N}, \quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \text{per } \alpha \neq -1$$

Oss. In realtà $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$. Se scrivo $\int \frac{1}{x} dx = \log x$ dico una cosa vera, cioè la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$.

Tuttavia $\frac{1}{x}$ è definita per ogni $x \neq 0$, quindi ha senso cercare una funzione $F(x)$, definita per ogni $x \neq 0$, e tale che
$$F'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

È ovvio che $F(x) = \log x$ va bene per $x > 0$, mentre per $x < 0$ va bene $\log(-x) = F(x)$: infatti $F'(x) = [\log(-x)]' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$.

Il famigerato $+c$ Prendiamo $f(x) = 3x^2$. Una sua primitiva è $F(x) = x^3$.

Chi sono tutte le primitive di $f(x) = 3x^2$?

Sono tutte le funzioni del tipo $F(x) = x^3 + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Motivo: la differenza tra 2 primitive ha derivata nulla, quindi su tutto $\mathbb{R}$ è costante (vedi Lagrange...).

Dunque in questo caso $x^3 + c$ rappresenta l'insieme di tutte le primitive.

Prendiamo ora $f(x) = \frac{1}{x}$. Una sua primitiva è $F(x) = \log|x|$.

Chi sono tutte le primitive di $f(x) = \frac{1}{x}$?

Tutte le funzioni del tipo $F(x) = \log|x| + c$? NO!!!!

Sono tutte le funzioni del tipo

$$F(x) = \begin{cases} \log x + c_1 & \text{per } x > 0 \\ \log(-x) + c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

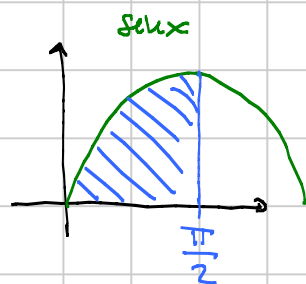
Posso usare c_1 e c_2 diversi sui positivi e sui negativi! Il motivo è che l'insieme di definizione è fatto da 2 pezzi, quindi posso usare c diversi sui due pezzi (avere derivata nulla vuol dire essere costanti separatamente sui 2 pezzi).

Riassumendo:

- mettere $+c$ non serve a nulla per il calcolo esplicito di un integrale con estremi
- mettere $+c$ può non bastare per descrivere l'insieme di tutte le primitive.

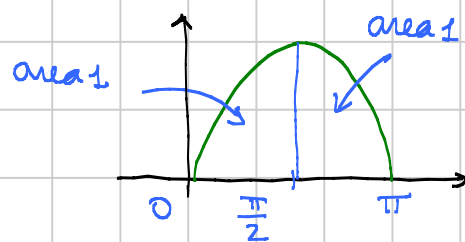
Esempio 1

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2}$$
$$= -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)$$
$$= 0 + 1 = 1$$



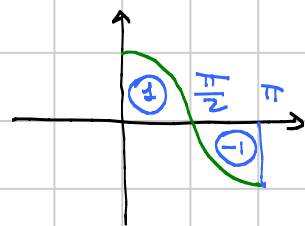
Esempio 2 $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos \frac{\pi}{2})$
 $= 1 - 0 = 1$

Si poteva dedurre dal precedente per ragioni di simmetria



Esempio 3 $\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x \, dx = -1$ (dedotto dai precedenti per ragioni di simmetria o in alternativa facendo il conto).

Esempio 4 $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi}$
 $= \sin \pi - \sin 0 = 0$



Esempio 5 $\int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx = \int_1^3 x^{-2} \, dx = \left[\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \right]_1^3 = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3$
 $= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

x^a con $a = -2$

Controllo della primitiva: $\left[-\frac{1}{x} \right]' = \frac{1}{x^2}$ ok.

Esempio 6 $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} \, dx = \int_{-1}^2 x^{-3} \, dx = \left[\frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \right]_{-1}^2 = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^2$

Verifica della primitiva: $\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]' = -\frac{1}{2} \cdot (-2) x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ ok.

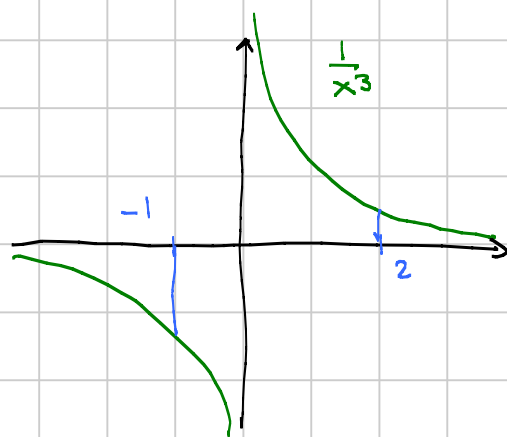
Conclusione: $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} \, dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

ASSOLUTAMENTE NO!!!

Gli ingredienti fondamentali

degli integrali PROPRI sono

- zona di integrazione limitata
- integranda limitata



Sotto un integrale c'è sottinteso lo studio della limitatezza...

Esempio 7 $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Esempio 8 $\int 2^x dx = \int e^{x \log 2} dx = \frac{1}{\log 2} e^{x \log 2} = \frac{1}{\log 2} \cdot 2^x$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} \cdot a^x$$

Esempio 9 $\int \sin(5x) dx = -\frac{1}{5} \cos(5x)$

Esempio 10 $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

$$\int \sqrt{x+5} dx = \frac{2}{3} (x+5) \sqrt{x+5}$$

$$\int \sqrt{2x+5} dx = \frac{2}{3} (2x+5) \sqrt{2x+5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} (2x+5) \sqrt{2x+5}$$

Verifica della primitiva:

$$\left[\frac{1}{3} (2x+5) \sqrt{2x+5} \right]' = \left[\frac{1}{3} (2x+5)^{\frac{3}{2}} \right]'$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}} \cdot \cancel{\frac{3}{2}} (2x+5)^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} = \sqrt{2x+5} \quad \text{Ok,}$$