

Esercizio 1 Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$

Sovrapporre i grafici è pericoloso!

Studio la funzione $f(x) = x - \arctan(x^2)$

(la disequazione sarà poi $f(x) \geq 0$)



1 - Nessuna simmetria

2 - $f(x)$ è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$

3 - Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

[Nota bene: queste informazioni da sole garantiscono che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva]

4 - Zeri e segno: non lo sappiamo fare ... per ora.

5 - Studio di $f'(x)$. Intanto esiste in tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

Ora dovrei studiare $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$. Poiché denominatore > 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, basta studiare zeri e segno di $x^4 - 2x + 1$.

Poiché si annulla per $x = 1$, possiamo dividere per $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & -2x+1 \\ -x^4+x^3 & \\ \hline & x^3-2x+1 \\ & -x^3+x^2 \\ \hline & x^2-2x+1 \\ & -x^2+x \\ \hline & -x+1 \\ & x-1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Dalla divisione deduco che

$$x^4 - 2x + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)$$

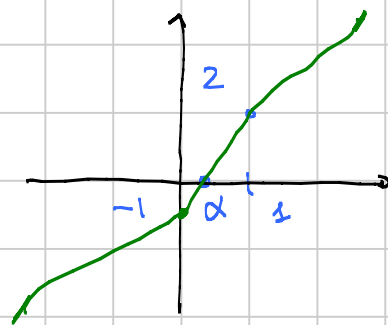
Il segno del 1° fattore si studia bene, il 2° fattore NO.

Oss. Il 2° fattore si annulla di sicuro perché tende a $\pm\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Per il 2° fattore, pongo $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ e studio $g(x)$.

Tende a $\pm\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Risolve $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Ora il discriminante è < 0 , quindi $g'(x) > 0$ sempre, quindi $g(x)$ è monotona crescente.

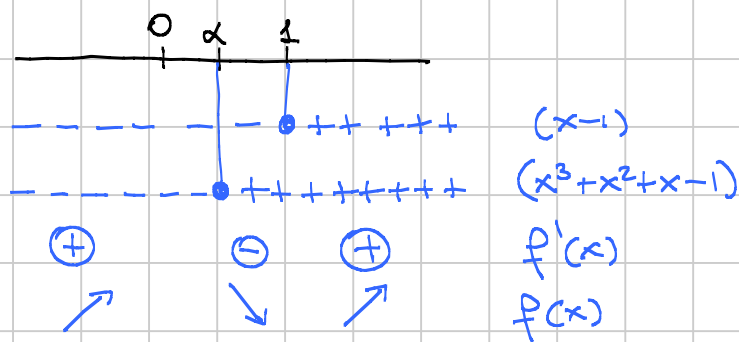
Per la monotonia abbiamo che $g(x)$ si annulla una volta sola, e lo fa in un pto $\alpha \in (0, 1)$ perché $g(0) = -1$ e $g(1) = 2$.



Riassumendo, il segno di $g(x)$ è così



Torniamo a $x^4 - 2x + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)$



Osserviamo che $f(0) = 0$

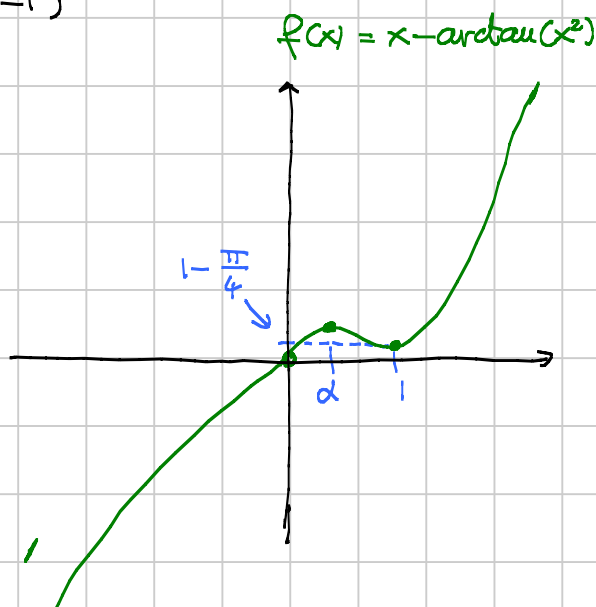
$f(x)$ cresce fino in $x = \alpha$ (quindi $f(x) > 0$)

poi decresce da α fino ad 1.

Calcolo $f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$

Da $x=1$ in poi cresce,

Ora siamo in grado di dire che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$, e vale il segno di uguale se e solo se $x = 0$.



Seconda soluzione dell'esercizio: devo risolvere $\arctan(x^2) \leq x$

- Per $x < 0$ ho che è falsa in quanto $x < 0$ e $\arctan(x^2) > 0$
- Per $x = 0$ vale il segno di uguale
- per $x \in (0, 1)$ abbiamo che $\arctan(x^2) < x^2 < x$

$\uparrow$ disug. classica
 $\leftarrow$ vera in $(0, 1)$
- per $x \geq 1$ si studia la funzione e si vede che è più semplice lo studio del segno di $f'(x)$.

Esercizio 2 Studiare $x_{n+1} = \cos x_n$ $x_0 = 2011$

È equivalente a scrivere 2011 su una calcolatrice, e poi continuare a schiacciare $\cos$: ogni termine è il coseno del precedente.

Dopo un po' si stabilizza su un valore, segue evidente che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Idea: $x_n \rightarrow l$ spiraleggiando.

Proviamo un piano con la distanza:

sia l la soluzione dell'equazione

$$\cos x = x.$$

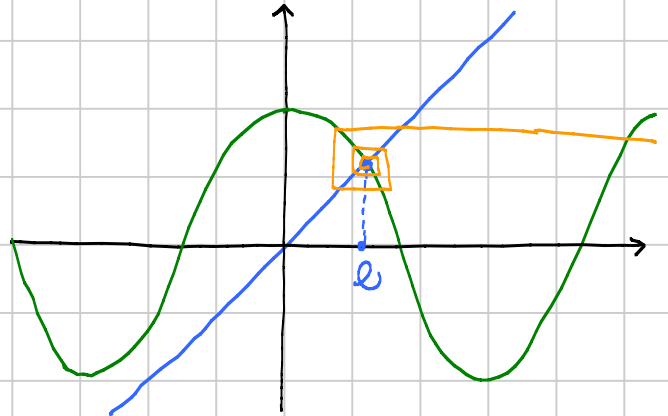
Poniamo $d_n = |x_n - l|$. Allora

(i) $-1 \leq x_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$.

(ii) $d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $x_n \rightarrow l$.



Intanto: perché l'equazione $\cos x = x$ ha soluzione? Perché la soluzione è unica? Basta studiare la funzione $g(x) = x - \cos x$ che risulta surgettiva (limiti...) e iniettiva (in quanto strettamente crescente per Monotonia 3: verificare!).

Dim (i) Banale induttiva

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Def. } d_n & & \text{ricor. + } l = \cos l & & \text{Lagrange} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Dim (ii)} & d_{n+1} = |x_{n+1} - l| & = |\cos x_n - \cos l| & = \underbrace{|x_n - l|}_{d_n} \cdot \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq 1} \end{array}$$

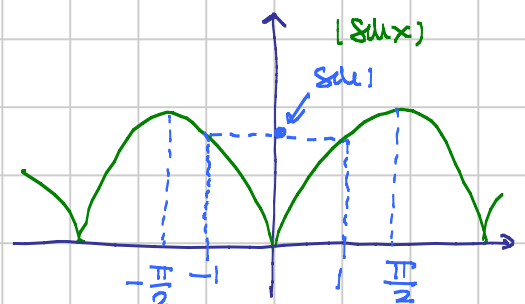
In questo modo avrei dimostrato che $d_{n+1} \leq d_n$, e questo non serve a nulla, MA

$$d_{n+1} = \underbrace{|x_n - l|}_{d_n} \cdot |\sin \xi| \quad \text{Ora abbiamo che } \xi \in [-1, 1], \text{ quindi}$$

$$|\sin \xi| \leq \max \{ |\sin x| : x \in [-1, 1] \} = \sin 1 < 1$$

Quindi in realtà $|\sin \xi| \leq \sin 1$, cioè

$$d_{n+1} \leq \underbrace{(\sin 1)}_{c < 1} \cdot d_n$$



Dim (iii) e (iv) Solita roba (con (ii)) $d_n \leq (\sin 1)^{n-1} d_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.