

Integrali: come si calcolano?

No di certo mediante le somme di Riemann inferiori e superiori.

Def. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisce PRIMITIVA di f una qualunque funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che F è derivabile e

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Operativamente * Voglio calcolare $\int_a^b f(x) dx$, con f continua

* Determino una qualunque primitiva F di f

$$\begin{aligned} * \text{ Allora } \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \\ &= [F(x)]_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

Esempio Voglio calcolare $\int_0^1 x^2 dx$. Allora cerco una funzione $F(x)$

tale che $F'(x) = x^2$ per ogni $x \in [0, 1]$. È facile vedere che $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ (basta fare la verifica che $F'(x) = x^2 \dots$).

Allora

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

— 0 — 0 —

C'è da dimostrare che

* primitive diverse danno comunque lo stesso risultato

* il risultato di $[F(x)]_a^b$ è proprio l'integrale.

Primitive diverse, risultato uguale

Siano $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ due primitive della stessa $f(x)$. Allora
 $[F_1(x)]_a^b = [F_2(x)]_a^b$

Dim. Pongo $G(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Allora

$$G'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Quindi $G'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Ma allora $G(x) = \text{costante}$ perché

$$G(x) - G(a) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{G'(\xi)} \cdot \underset{0}{(x-a)} = 0$$

cioè $G(x) = G(a)$ per ogni $x \in [a, b]$.

[Achtung! Il fatto che la derivata di una costante è 0 non escluderebbe da solo l'esistenza di funzioni strane con derivata nulla...]

Una volta che $G(x) = \text{costante } \lambda$ abbiamo che $F_2(x) - F_1(x) = \lambda$, cioè
 $F_2(x) = F_1(x) + \lambda$ per ogni $x \in [a, b]$. Ma allora

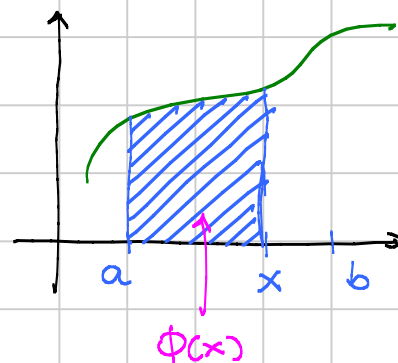
$$\begin{aligned} [F_2(x)]_a^b &= F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + \lambda) - (F_1(a) + \lambda) \\ &= F_1(b) - F_1(a) = [F_1(x)]_a^b \end{aligned}$$

Funzione integrale

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice funzione integrale la funzione

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$\uparrow$
variabile di integrazione
che può avere un
nome qualunque, ma
diverso dagli estremi



Achtung! Non ha senso scrivere $\int_a^x f(x) dx$ come non ha senso

scrivere $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ (si scrive invece $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$)

Proprietà base della funzione integrale

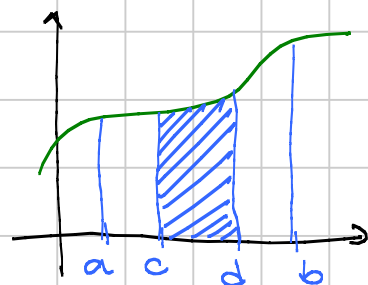
1-
$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) = [\Phi(x)]_a^b$$

2- Se $[c, d] \subseteq [a, b]$, allora

$$\int_c^d f(x) dx = \Phi(d) - \Phi(c)$$

$\downarrow$ integrale tra a e d $\downarrow$ integrale tra a e c

$$= [\Phi(x)]_c^d$$



Proprietà meno banale: $\Phi(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

Se dimostro la proprietà meno banale ho giustificato il metodo di calcolo perché esiste una primitiva di $f(x)$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = [\text{primitiva}]_a^b$$

e se è vero per una primitiva, allora è vero per tutte.

Teorema della media integrale Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

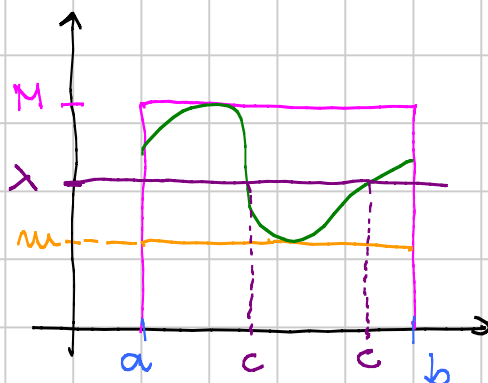
Allora esiste almeno un p.to $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Dim. Considero $M = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$
 $m = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$

Esistono per Weierstrass. Inoltre

$$\underbrace{m(b-a)}_{\text{area rettangolo piccolo}} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{M(b-a)}_{\text{area rettangolo grande}}$$



Quindi

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\lambda} \leq M$$

Quindi λ è un numero compreso tra il minimo m ed il massimo M .

Per il teorema di esistenza dei valori intermedi, esiste almeno un p.to $c \in [a, b]$ (o anche più di 1) tale che $f(c) = \lambda$, che è proprio la tesi.

— o — o —

Oss. Si chiama teorema della media integrale perché il rettangolo di base $[a, b]$ e altezza $f(c) = \lambda$ ha area uguale al valore dell'integrale.

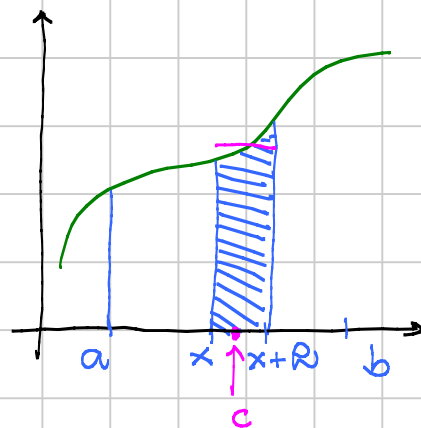
— o — o —

Teorema fondamentale del calcolo integrale. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $\Phi(x)$ la funzione integrale.

Allora $\Phi'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, cioè $\Phi(x)$ è una primitiva di f .

Dim. Calcolo il rapporto incrementale (per semplicità prendo $h > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$



$$(\text{teo. media int.}) = \frac{1}{h} \cdot \boxed{h} \cdot \boxed{f(c)} = f(c)$$

↑ ↑
ampiezza valore in un
intervallo p.to intermedio

Ovviamente c dipende da x e da h , ma in ogni caso $x \leq c \leq x+h$

Quando $h \rightarrow 0$, ho che $c \rightarrow x$ per i carabinieri, quindi $f(c) \rightarrow f(x)$.

In conclusione

$$\Phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x), \text{ che è la tesi. } \square$$

— o — o —