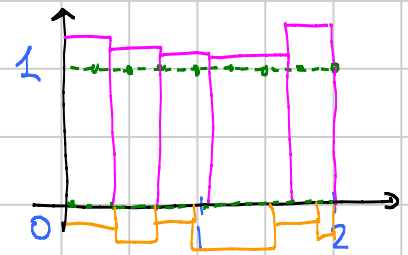


Esempio Consideriamo la funzione $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

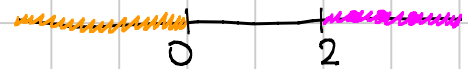


Sia ora φ una funzione a gradino con $\varphi(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$.

Dove essere $\varphi(x) \geq 1$ per ogni $x \in [0, 2]$, quindi tutte le somme di Riemann superiori sono ≥ 2 .

Analogamente, se φ è a gradino e $\varphi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$, questo vuol dire che $\varphi(x) \leq 0$. Quindi tutte le somme di R. inferiori sono ≤ 0 . Quindi

$$I^+(f; [0, 2]) = 2, \quad I^-(f; [0, 2]) = 0.$$



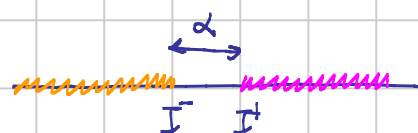
Teorema Sono integrabili

- tutte le funzioni monotone, anche non continue,
- tutte le funzioni continue,
- tutte le funzioni che hanno un numero finito di punti di discontinuità nei quali esistono i limiti da destra e sinistra.

Dim. per le funzioni monotone

per ogni $\varepsilon > 0$

Primo passo. Basta dimostrare che esistono una somma di R. superiore ed una inferiore che distano meno di ε . Se infatti fosse $I^+ - I^- = \alpha > 0$, allora non esisterebbe somme superiori e inferiori con distanza minore di $\frac{\alpha}{2}$.

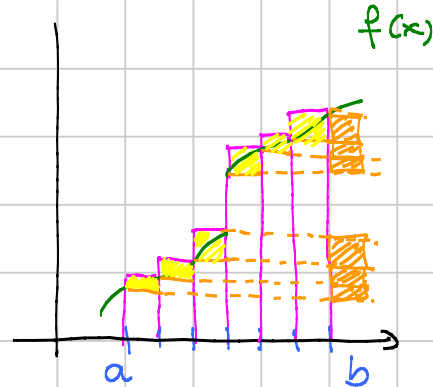


Secondo passo. Divido $[a, b]$ in n parti uguali.

Supponendo $f(x)$ monotona crescente prendo la funzione a gradino considerando il valore nell'estremo dx di ogni intervallo, e quella considerando l'estremo sx.

Chiamo $\varphi_1(x)$ quella sopra e $\varphi_2(x)$ quella sotto.

Allora
$$\int_a^b \varphi_1(x) dx - \int_a^b \varphi_2(x) dx = \text{area "avanti"}$$



Unendo tutti gli avanti viene meno di un rettangolo che ha come base $\frac{b-a}{n}$ e come altezza $f(b) - f(a)$. Quindi l'area degli avanti tende a 0 quando $n \rightarrow +\infty$.

— o — o —

Esempio di calcolo di integrale mediante somme di Riemann.

Voglio calcolare $\int_0^1 x^2 dx$. Noto che $f(x) = x^2$ è monotona in $[0, 1]$, quindi di sicuro integrabile.

Per scrivere una somma di R. sup. divido $[0, 1]$

in n parti uguali. In ogni tratto prendo il

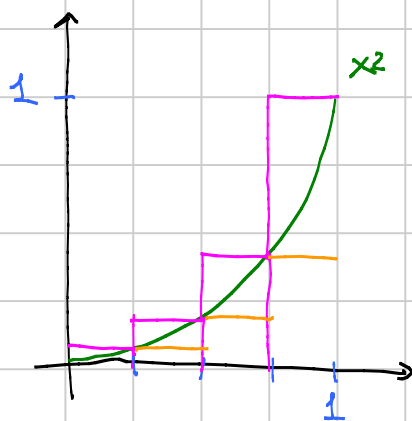
valore nell'estremo destro. Quindi il

rettangolo i -esimo ha come base l'intervallo

$[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ e come altezza $f(\frac{i}{n}) = \frac{i^2}{n^2}$,

quindi area

$$\text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2} = \frac{i^2}{n^3}$$



Quindi la corrispondente somma di R. superiore è

$$\sum_{i=1}^n \text{Area}(R_i) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(SRS)

uso formula per
la somma dei quadrati (induz.)

Analogamente considerando l'estremo sinistro abbiamo che l' i -esimo rettangolo ha base $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ e altezza $f(\frac{i-1}{n}) = \frac{(i-1)^2}{n^2}$

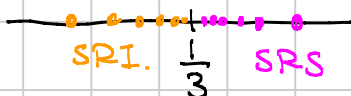
La corrispondente somma è

$$\sum_{i=1}^n \text{Area}(R_i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{(i-1)^2}{n^2}}_{\text{altezza}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{base}} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

(SRI)

precedente con $n-1$ al posto di n

Cosa succede quando $n \rightarrow +\infty$? Sia la somma superiore che quella inferiore tendono ad $\frac{1}{3}$, che quindi è il valore dell'integrale.



Proprietà degli integrali

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \textcircled{2} \quad \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_a^b} \right\} \begin{array}{l} \text{L'integrale è} \\ \text{una applicazione} \\ \text{lineare} \end{array}$$

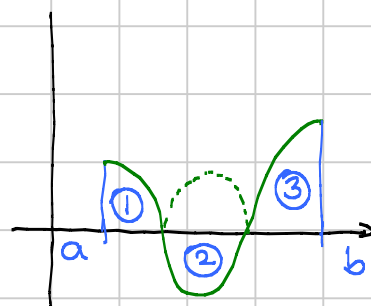
$$\textcircled{3} \quad \text{Se } f(x) \geq g(x) \text{ per ogni } x \in [a, b], \text{ allora } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

In particolare, se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$$\textcircled{4} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Nell'esempio è come dire che

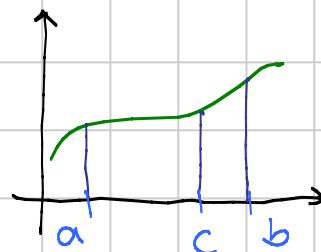


$$| \text{Area } \textcircled{1} - \text{Area } \textcircled{2} + \text{Area } \textcircled{3} | \leq \text{Area } \textcircled{1} + \text{Area } \textcircled{2} + \text{Area } \textcircled{3}$$

quindi è una proprietà dei valori assoluti

⑤ Se $c \in (a, b)$, allora

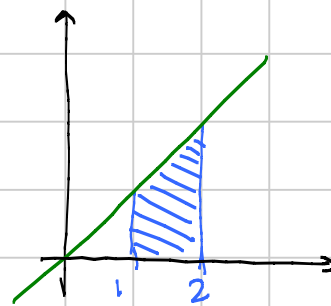
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Esempio 1

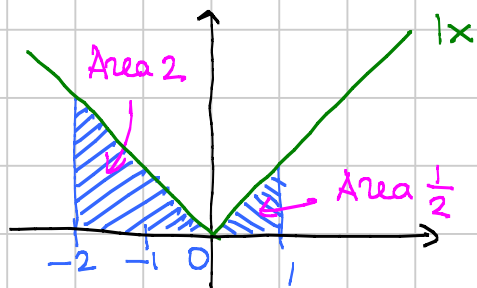
$$\int_1^2 x \, dx = \text{area trapezio}$$
$$= (1+2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Formula per area
trapezio



Esempio 2

$$\int_{-2}^1 |x| \, dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$



Esempio 3

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx =$$

= area semicircolo

$$= \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{\pi}{2}$$

