

INTEGRALI

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico
- ③ Come si definiscono
- ④ Come si calcolano

① Notazioni

$$\int_a^b f(x) dx$$

Si intende che:

- $[a, b]$ è la zona di integrazione, cioè l'insieme su cui si integra (intervallo limitato)
- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione che si integra (integrand)
- dx indica che si integra rispetto alla variabile x

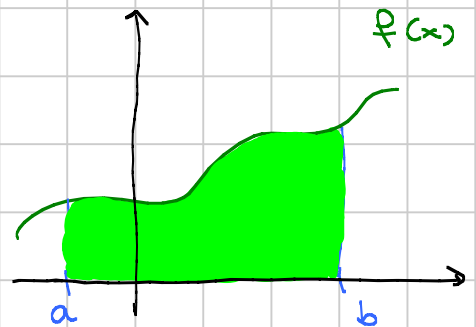
Ingredienti fondamentali:

- zona di integrazione che è un intervallo limitato
- funzione integranda $f(x)$ limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$

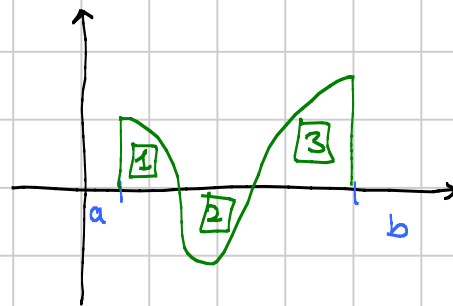
Se ci sono gli ingredienti fondamentali si parla di integrale **PROPRIO**, altrimenti l'integrale è **IMPROPRIO**.

② Significato geometrico

$\int_a^b f(x) dx = \text{area CON SEGNO}$
della parte di piano compresa
tra asse x , grafico di $f(x)$ e
rette $x = a$ e $x = b$



Area con segno: le zone con $f(x) \geq 0$ contano con il segno +, quelle con $f(x) \leq 0$ contano con il segno -.



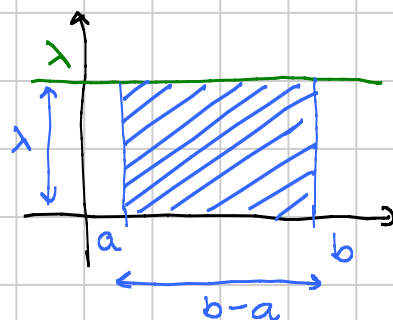
$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area [1]} - \text{Area [2]} + \text{Area [3]}$$

③ Definizione formale

- Caso banale (funzioni costanti)
- Caso semibanale (funzioni a gradino)
- Caso generale (funzioni generali)

Caso banale: sia $f(x) = \lambda$ per ogni $x \in [a, b]$,
dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è una costante.

In questo caso



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \text{area del rettangolo (con segno)} \\ &= \text{base} \cdot \text{altezza} = (b-a) \cdot \lambda \end{aligned}$$

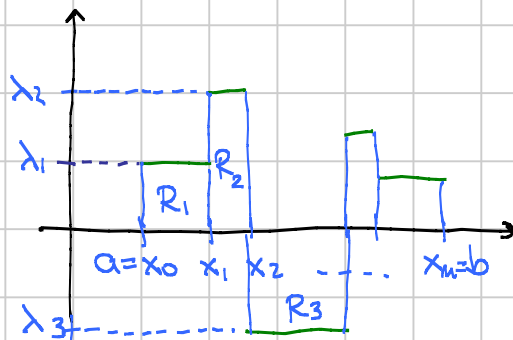
Nota bene: se $\lambda < 0$, l'integrale viene negativo.

Caso semibanale: funzioni a gradino (funzioni semplici, step functions)
si tratta di funzioni costanti a tratti.

Vuol dire che l'intervallo $[a, b]$ è suddiviso in un numero finito di sottointervalli, ed $f(x)$ è costante in ogni sottointervallo.

Quindi si è fissato

- un intero $n \geq 1$ (il numero di sottointerv.)
- punti $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
(gli estremi della suddivisione)
- valori reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (valori assunti da $f(x)$ nei vari sottointervalli).



In questo caso

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \text{somma ALGEBRICA delle aree dei rettangoli} \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Area}(R_k) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\text{base } R_k} \cdot \underbrace{\lambda_k}_{\text{altezza di } R_k \text{ con segno,}} \end{aligned}$$

Caso generale Sia ora $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque funzione limitata.

Considero le funzioni a gradino $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\varphi(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$

Considero l'insieme costituito dagli integrali di tutte le $\varphi(x)$ così costruite.

Intuitivamente, l'integrale di $f(x)$ è l'inf. di tutti questi numeri. Se voglio avvicinarmi all'inf. devo suddividere $[a, b]$ in molti pezzi e non "sprecare con le altezze"



Analogamente potrei

* considerare tutte le funzioni a gradino $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$,

* per ciascuna di esse calcolare l'integrale,

* prendere il sup di tutti i numeri ottenuti.



Definizione Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Si dice integrale superiore di f in $[a, b]$ il numero

$$I^+(f; [a, b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ è a gradino e } \varphi(x) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \right\}$$

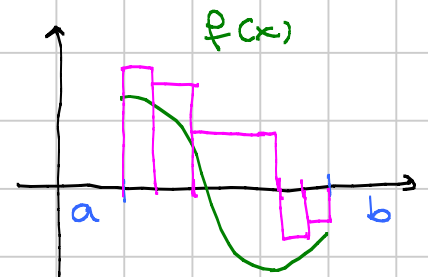
Analogamente si definisce l'integrale inferiore

$$I^-(f; [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ è a gradino e } \varphi(x) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \right\}$$

Oss. Avendo già definito l'integrale per le sole funzioni a gradino, questo procedimento permette di definire integrale inferiore e superiore per ogni $f(x)$ limitata.

Oss. La limitatezza di $f(x)$ garantisce l'esistenza di almeno una funzione semplice $\geq f(x)$ e di una $\leq f(x)$.

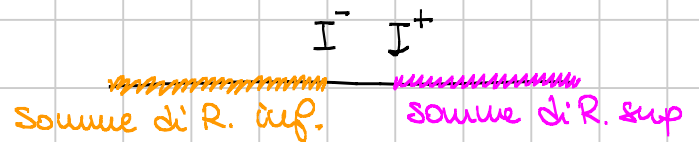
Oss. Occhio a cosa vuol dire $\geq f(x)$ e $\leq f(x)$ quando $f(x)$ non è positiva



Fatto generale. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.
Allora

$$I^+(f; [a, b]) \geq I^-(f; [a, b]).$$

Questo è vero perché l'insieme degli integrali delle $\varphi(x) \geq f(x)$ a gradino sta tutto a dx rispetto all'insieme degli integrali delle $\varphi(x)$ con $\varphi(x) \leq f(x)$.



Definizione Se accade che $I^+(f; [a, b]) = I^-(f; [a, b])$, allora si dice che $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$, ed il valore comune si dice integrale di f in $[a, b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx,$$

Notazione: Le SOMME DI RIEMANN superiori sono tutti gli integrali di funzioni a gradino $\geq f(x)$.
Analogamente per le SOMME DI RIEMANN inferiori.