

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 066

Titolo nota

11/11/2011

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \quad x_1 = 1$

Idea: $x_n \rightarrow 0$ decrescendo ($x_2 = 1, x_3 = \frac{x_2^2}{2} = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{x_3^2}{3} = \frac{1}{12}, \dots$)

PIANO 1 (i) $0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_n \rightarrow 0$

Dim (i) La parte $x_n \geq 0$ è ovvia. Dim. che $x_n \leq 1$ per induzione

Passo base: $n=1$ ovvio $1 \leq 1$

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \leq 1$ Tesi: $x_{n+1} \leq 1$

Dim. $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$
 $\uparrow$ ricor. $\uparrow$ uso ipotesi e il fatto che x^2 è crescente per $x \geq 0$ e lo so già che $x_n \geq 0$ $\uparrow$ ovvio per $n \geq 1$

La catena di disuguaglianze dice che $x_{n+1} \leq 1$, che è la tesi.

Dim (ii) Grazie al pto. (i) sappiamo che $0 \leq \frac{x_n^2}{n} \leq \frac{1}{n}$
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

da cui $x_{n+1} \rightarrow 0$, quindi anche $x_n \rightarrow 0$.

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \quad x_1 = 2$

[Oscuità: $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 l $\frac{l^2}{n} \rightarrow 0$ quindi $l=0$]

Calcolo i primi valori: $x_1 = 2, x_2 = \frac{x_1^2}{1} = 4, x_3 = \frac{x_2^2}{2} = 8$
 $x_4 = \frac{x_3^2}{3} = \frac{64}{3}$

Idea: x_n tende a $+\infty$.

PIANO (i) $x_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$ (ovvio per confronto una volta fatto il p.to (i)).

Dim. (i) Per induzione.

Passo base: $n=1$ viene $x_1 \geq 2$ banalmente vero ($x_1 = 2$)

Passo induttivo: ipotesi: $x_n \geq 2^n$ Tesi: $x_{n+1} \geq 2^{n+1}$

$$\begin{array}{lcl} \text{Dim.} & x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} & \geq \frac{(2^n)^2}{n} \geq 2^{n+1} \\ & \uparrow \text{ric.} & \uparrow \text{uso ipotesi e} \\ & & \uparrow \text{monotonia di } x^2 \\ & & \uparrow \text{per } x \geq 0 \end{array}$$

Controllo la speranza: $\frac{2^{2n}}{n} \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1}$, $2^{2n} \stackrel{?}{\geq} n \cdot 2^{n+1}$, $2^{n-1} \stackrel{?}{\geq} n$

A sua volta questa disuguaglianza si può dimostrare per induzione oppure usando Bernoulli:

$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$

$(1+x)^k \geq 1+kx$
con $x=1$ e $k=n-1$

Quindi la speranza è ok per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque anche il passaggio induttivo è ok per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Piano alternativo più corto: (i) $x_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim di (i): ---- passo induttivo ---. Ipotesi: $x_n \geq n$ Tesi: $x_{n+1} \geq n+1$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n, \text{ che non basta perché volevo } x_{n+1} \geq n+1$$

$\uparrow \text{ric.}$ $\uparrow \text{Hp}$

Quindi così non funziona.

Forse funzionava: (i) $x_n \geq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

$$\dots \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \geq \frac{n^4}{n} = n^3 \geq (n+1)^2$$

$\uparrow$ uso ipotesi $\uparrow$ questa è vera da un certo n

quantificabile in poi, e non mi resta che controllare i primi base fino a quel p.to.

PIANO

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ovvio)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \quad x_1 = 2$$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (ovvio dati (i) e (ii))

(iv) $l = 0$ (ovvio dato (iii) - fatto all'inizio)

Dim. di (ii)

Riconverto + disuguaglianze. Devo dimostrare che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè $\frac{x_n^2}{n} \leq x_n$, il che si riduce a $x^2 \leq nx$, cioè $x^2 - nx \leq 0$, cioè $x \in [0, n]$, il che definitivamente è vero....

— 0 — 0 —

Esempio 3 $x_{n+1} = 7 + \frac{n^{20}}{2^n} x_n \quad x_1 = 2011$

$$x_2 = 7 + \frac{1}{2} x_1 \sim 7 + 1.000 \sim 1.007$$

$$x_3 = 7 + \frac{2^{20}}{2^2} x_2 = 7 + 2^{18} \cdot 1.007 = \text{enorme}$$

$$x_4 = 7 + \frac{3^{20}}{2^3} x_3 = \text{ancora} + \text{enorme} \dots$$

e infatti... $x_n \rightarrow 7$.

Abbiamo che $\frac{n^{20}}{2^n} \rightarrow 0$, quindi definitivamente $\frac{n^{20}}{2^n} \leq \frac{1}{2}$

Più precisamente esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{n^{20}}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq n_0$.

PIANO (i) $7 \leq x_n \leq x_{m_0} + 14$ per ogni $n \geq m_0$
 (ii) $x_n \rightarrow 7$

Dim. pto (ii) Dal pto (i) sappiamo che

$$7 + \frac{n^{20}}{2^n} 7 \leq 7 + \frac{n^{20}}{2^n} x_n \leq 7 + \frac{n^{20}}{2^n} (x_{m_0} + 14)$$

$\downarrow$ 7 $\downarrow$ 7 $\downarrow$ 7

Questo è un numero
fisso: il valore per
 $n = m_0$ più 14.

Ho quindi che $x_{n+1} \rightarrow 7$, quindi $x_n \rightarrow 7$

Dim. pto (i) La parte $x_n \geq 7$ è ovvia per induzione.

Dimostro per induzione che $x_n \leq x_{m_0} + 14$ per ogni $n \geq m_0$.

Passo base: $n = m_0$. Viene $x_{m_0} \leq x_{m_0} + 14$ ovvio

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \leq x_{m_0} + 14$ Tesi: $x_{n+1} \leq x_{m_0} + 14$

Dim. $x_{n+1} = 7 + \frac{n^{20}}{2^n} x_n \leq 7 + \frac{n^{20}}{2^n} (x_{m_0} + 14)$

$\uparrow$ ric. $\uparrow$ uso Hp

$$\text{uso } \frac{n^{20}}{2^n} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \leq 7 + \frac{1}{2} (x_{m_0} + 14)$$

$$= 7 + \frac{x_{m_0}}{2} + 7$$

$$= \frac{x_{m_0}}{2} + 14$$

ovvia

$$\hookrightarrow \leq x_{m_0} + 14$$

Questo dimostra il passaggio induttivo per ogni $n \geq m_0$.

— 0 — 0 —