

ANALISI MATEMATICA I — LEZIONE 065

Titolo nota

11/11/2011

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n + n}{2n+3}$ $x_0 = 2011$

Idea: decresce e tende a ... boh! Tentiamo un p.to (iv)...

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora passando al limite

$$\boxed{x_{n+1}} = \frac{\boxed{x_n + n}}{\boxed{2n+3}} = \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{\boxed{x_n}}{\boxed{n}}\right)}{\cancel{n} \left(2 + \frac{\boxed{3}}{\boxed{n}}\right)}$$

0 perché è $\frac{l}{+\infty}$ con $l \in \mathbb{R}$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$l = \frac{1}{2}$$

Conclusione: se x_n ha un limite reale, allora $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Piano con la monotonia

(i) $x_n \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (s.dito)

(iv) $l = \frac{1}{2}$ (fatto sopra dando (iii) per ok)

Dim. (i) Induzione. Passo base: banale

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \geq \frac{1}{2}$ Tesi: $x_{n+1} \geq \frac{1}{2}$

$$\underline{\text{Dim.}} \quad x_{n+1} = \frac{x_n + n}{2n+3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso Hp}}}{\geq} \frac{\frac{1}{2} + n}{2n+3} = \frac{2n+1}{2(2n+3)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\geq} \frac{1}{2}$$

Controllo la speranza: $\frac{2n+1}{2(2n+3)} \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{2}$; $2n+1 \stackrel{?}{\geq} 2n+3$ FALSO!

Quindi il p.to (i) per induzione non si dimostra...

Dim. (ii) Ricorrenza + disuguaglianza: devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè

$$\frac{x_n + n}{2n+3} \leq x_n, \quad x_n + n \leq 2n x_n + 3x_n, \quad 2x_n + 2n x_n \geq n,$$

$$2(n+1)x_n \geq n, \quad \text{cioè} \quad x_n \geq \frac{n}{2(n+1)}$$

Il problema è che non so che $x_n \geq \frac{n}{2(n+1)}$ --.

Possibile rimedio: aggiungere il p.to (i), richiedendo questa condizione, oppure cambiare totalmente strada.

Secondo tentativo: Diminuitenza + carabinieri (i) $0 \leq x_n \leq 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$

Dim (i) Dim. per induzione che $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione... da fare!)

Dim. per induzione che $x_n \leq 10.000$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passo base: banale

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \leq 10.000$ Tesi: $x_{n+1} \leq 10.000$

Dim.
$$x_{n+1} = \frac{x_n + n}{2n+3} = \frac{x_n}{2n+3} + \frac{n}{2n+3} \leq \frac{10.000}{2n+3} + \frac{n}{2n+3}$$

uso ipotesi
divisa per $2n+3$
$$\leq \frac{10.000}{3} + \frac{n}{2n} \leq 4.000 + \frac{1}{2} \leq 10.000$$

denominatori
più piccoli

La catena di disuguaglianze dice che $x_{n+1} \leq 10.000$ che è la tesi.

Dim (ii) Dal p.to (i) sappiamo che $0 \leq x_n \leq 10.000$, quindi
 $n \leq x_n + n \leq 10.000 + n$. Ora divido per $2n+3$ e ottengo

$$\boxed{\frac{n}{2n+3}} \leq \boxed{\frac{x_n + n}{2n+3}} \leq \boxed{\frac{10.000 + n}{2n+3}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Per i carabinieri ho che $x_{n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$, quindi anche $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

Esercizio: provare il piano con

(i) $x_n \geq \frac{n}{2(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (iv) $l = \frac{1}{2}$

Esempio 2 $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80}$ $x_1 = 2011$ (N.B.: $x_2 = \sqrt[1]{x_1 + 80} = 2091$)

Idea: $x_n \rightarrow 1$. PIANO (i) $1 \leq x_n \leq 3.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_n \rightarrow 1$

Dim. (i) La disug. $x_n \geq 1$ è facile per induzione (fine!)

Dim. per induzione che $x_n \leq 3.000$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Passo base: ovvio

Passo induttivo: Ipotesi: $x_n \leq 3.000$ Tesi: $x_{n+1} \leq 3.000$

Dim.: $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80} \leq \sqrt[n]{3.000 + 80} \leq \sqrt[n]{3.080} \leq 3.000$
↑ ↑ ↑
 uso ricor. uso ipotesi e monotonia di $\sqrt[n]{x}$ se $n \geq 2$

Quindi il passo induttivo è OK se $n \geq 2$. 1 ||||
1 2 3 4 5 6

Quindi il passo base deve essere $n=1$, ma anche $n=2$. Quindi controllo $n=1 \Rightarrow x_1 = 2011 \leq 3.000$ $n=2 \Rightarrow x_2 = 2091 \leq 3.000$.

Dim (ii) Grazie al pto (i) e alla monotonia di $\sqrt[n]{x}$ sappiamo che

$$\boxed{\sqrt[n]{81}} \leq \sqrt[n]{x_n + 80} \leq \boxed{\sqrt[n]{3.080}}$$

↓ ↓ ↓
1 1 1

Solita conclusione con i carabinieri,
— o — o —

Esempio 3 $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80n}$ $x_1 = 2011$

facile delicato
↓ ↓

Primo tentativo: (i) $1 \leq x_n \leq 3.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow 1$ (dato il pto (i), questo è facile)

Provo a dim che $x_n \leq 3.000$... $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80n} \leq \sqrt[n]{3000 + 80n} \leq 3.000$
↑ ↑ ↑
 ric. ipotesi induttiva spesso

La speranza è equivalente a $3.000 + 80n \leq 3.000^n$. Questo definitivamente è vero, ma dovrei

* capire quando inizia ad essere vero

* controllare tutti i passi base fino a quel p.to...

Alternativa: (i) $1 \leq x_n \leq 3.000^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow 1$ (ancora carabiniere)

Dim che $x_n \leq 3.000^n$ Faccio solo il passo induttivo

Ipotesi: $x_n \leq 3.000^n$ Tesi: $x_{n+1} \leq 3.000 + 3.000^n$

$$\text{Dim. } x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + 80n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{H.C.}}}{\leq} \sqrt[n]{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{x_n} + 80n} = \sqrt[n]{3.080n} = \sqrt[n]{3.080} \cdot \sqrt[n]{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speso}}}{\leq} 3.000^n$$

Controllo la speranza: $\sqrt[n]{3.080n} \leq 3.000^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{3.080} \cdot \sqrt[n]{n} \leq 3.000^n$

Appena $n \geq 2$ ho che

$$\sqrt[n]{3.080} \leq \sqrt{3.080} \leq 3.000$$

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt{n} \leq n$$

Quindi devo solo controllare i passi base $n=1$ e $n=2$.
— o — o —