

Successioni per ricorrenza non autonome

L'unica regola è che non ci sono regole.

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n}{3 + \sqrt{n}}$

$x_0 = 2011$

Non c'è una funzione da disegnare

Idea: x_n tende a 0 decrescendo.1° modo: piano con MONOTONIA

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Dim. (i) Per induzione. Passo base: banale $2011 \geq 0 \dots$ Passo induttivo Ipotesi: $x_n \geq 0$ Tesi: $x_{n+1} \geq 0$

$$\text{Dim. } x_{n+1} = \frac{\boxed{x_n}}{\boxed{3 + \sqrt{n}}} \geq 0.$$

↑
uso ricorrenza

≥ 0 per ipotesi

Dim. (ii) Ricorrenza più diseguale. Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè

$$\frac{x_n}{3 + \sqrt{n}} \leq x_n$$

Moltiplico per $3 + \sqrt{n}$ che è > 0 , quindi non cambio i versi

$$x_n \leq 3x_n + \sqrt{n}x_n, \quad \boxed{x_n} \boxed{(2 + \sqrt{n})} \geq 0 \quad \text{Ok,}$$

↓
dimostrato al pto (i)

Dim. (iii) Per il pto (i) ho che x_n è limitata inferiormente

Per il pto (ii) " " " " debolmente decrescente

Quindi per il teo delle succ. monotone ho che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Dim. (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3 + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{l}{+\infty} = 0$$

Achtung! Non scrivere mai

$$\frac{x_n}{3 + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{l}{3 + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

perché è limite metà per volta.

Oss. Nel p.to (iv) è fondamentale sapere già che $l \in \mathbb{R}$ (altrimenti se fosse $l = \pm \infty$ non potresti dire nulla della forma $\frac{l}{+\infty}$)

2° modo: criterio del rapporto

(i) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 0$

(iii) $x_n \rightarrow 0$.

Dim. (i) Induzione come prima.

Dim. (ii)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{x_n}}{\sqrt{n} + 3} \cdot \frac{1}{\cancel{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{n} + 3} \rightarrow 0$$

uso ric,

Dim. (iii) Criterio del rapporto applicato alla successione x_n .

Oss. Questo stesso piano dice anche che $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge

3° modo: LIMITATEZZA + CARABINIERI

(i) $0 \leq x_n \leq 2011 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow 0$

Dim. (i) La parte $x_n \geq 0$ si dimostra per induzione come prima. Dimostro che $x_n \leq 2011$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per induzione.

Passo base $n=0$: $x_0 \leq 2011$ ovvio ($x_0 = 2011$)

Passo induttivo Ipotesi: $x_n \leq 2011$ Tesi: $x_{n+1} \leq 2011$

Dim. $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{n} + 3} \leq \frac{x_n}{3} \leq \frac{2011}{3} \leq 2011$, che è proprio la tesi.

↑ uso ric. ↑ Denom. + piccolo Num. > 0 ↑ uso Hp

Dm (i) Dal pto (i) so che $0 \leq x_n \leq 2011$. Divido per $3 + \sqrt{n}$ senza cambiare i versi

$$\frac{0}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{x_n}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{2011}{\sqrt{n}+3} \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{0} \leq \boxed{x_{n+1}} \leq \boxed{\frac{2011}{\sqrt{n}+3}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Per il teorema dei carabinieri abbiamo che $x_{n+1} \rightarrow 0$, ma allora anche $x_n \rightarrow 0$ (è il discorso delle sottosuccessioni "finite")

— 0 — 0 —

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{3 + \sqrt{n}} \quad x_0 = 2011$

Tentativo di fare il rapporto: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{3 + \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{x_n}$

Non se ne va x_n , quindi non sembra semplice concludere...

Tentativo di fare la monotonia: al pto (ii) ci troviamo a dim. che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè

$$\frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{3 + \sqrt{n}} \leq x_n$$

e questa non è del tutto ovvia. In realtà

$$x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{3 + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n} x_n}{3 + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n} x_n}{\sqrt{n}} = x_n$$

uso disug. classica
 $\arctan x \leq x$ che vale
 per ogni $x \geq 0$, quindi serve
 sapere che $x_n \geq 0$ sempre

denom.
 più piccolo

Si potrebbe quindi fare anche un piano con la monotonia

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(facile per induzione)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(fatto sopra usando che $x_n \geq 0$)

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(solita storia)

(iv) $l = 0$

Dim. (co) Vorrei passare al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{\sqrt{n} + 3}$$

↓
l

Faccendo il limite di $\sqrt{n} \cdot x_n$ viene $l \cdot +\infty$, e se $l=0$ questo è un problema.

Risposta: per i pti (i) e (iii) sappiamo che $l=0$ oppure $l>0$.

Se $l=0$ allora abbiamo finito.

Se per assurdo fosse $l>0$, allora avrei che $\sqrt{n} \cdot x_n \rightarrow +\infty$, quindi potrei completare il limite scrivendo

$$x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{\sqrt{n} + 3}$$

↓
l

↓
0

↓
0

Quindi $l=0$, il che è assurdo essendo partiti da $l>0$.

Soluzione diretta con i carabinieri

$$-\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}+3}$$

↓
0

↓
0

↓
0

Per il teorema dei carabinieri abbiamo che $x_{n+1} \rightarrow 0$, ma per il solito motivo questo è equivalente a dire che $x_n \rightarrow 0$.

Come si comporta $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$? Purtroppo il confronto ci dice che è $\leq$ di una serie che si comporta come $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, quindi dal confronto non si può dire nulla...
(esercizio Hard...).