

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 063

Titolo nota

10/11/2011

Esempio $x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 2} \quad x_0 = \frac{1}{2}$

PIANO CON 2 SOTTOSECUSSIONI

(i) $\frac{1}{2} \leq x_{2m} \leq 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$1 \leq x_{2m+1} \leq \frac{6}{5} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{2m+2} \geq x_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$x_{2m+3} \leq x_{2m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(iii) $x_{2m} \rightarrow l \in \mathbb{R}, x_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$

(iv) $l = m = 1$.

Dim. di (i) Per $n=0$ abbiamo che $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$

Applico $f(x)$ invertendo i versi perchè è strett. decrescente

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(x_0) \geq f(1)$$

$$\frac{6}{5} \geq x_1 \geq 1 \quad \text{che è quello che serve con } n=1$$

Applico nuovamente $f(x)$ invertendo nuovamente i versi:

$$f\left(\frac{6}{5}\right) \leq f(x_1) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{15}{16} \leq x_2 \leq 1 \quad \text{che è quello che serve per } x_2.$$

Ora sappiamo che $\frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1$, quindi applicando $f(x)$ e invertendo

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(x_2) \geq f(1)$$

$$\frac{6}{5} \geq x_3 \geq 1 \quad \text{che è quello che volevamo per } x_3.$$

E così via: prendendo l'informazione ottenuta per un certo x_n e applicando $f(x)$, si ottiene l'informazione voluta per x_{n+1} .

Dim. di (ii) $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{15}{16}$.

Quindi $x_0 \leq x_2$. Applico $f(x)$: $f(x_0) \geq f(x_2)$, cioè $x_1 \geq x_3$.

Riapplico $f(x)$: $x_1 \geq x_3 \Rightarrow f(x) \leq f(x_3)$
 $\quad\quad\quad "x_2 \leq x_4"$

[illegible]

Continuando ad applicare $f(x)$ si ottengono tutte le disuguaglianze richieste al pto (ii) (esercizio: scrivere induzione per bene).

Osservazione sul pto (ii) Come si ottiene x_{2m+2} a partire da x_{2m} ?

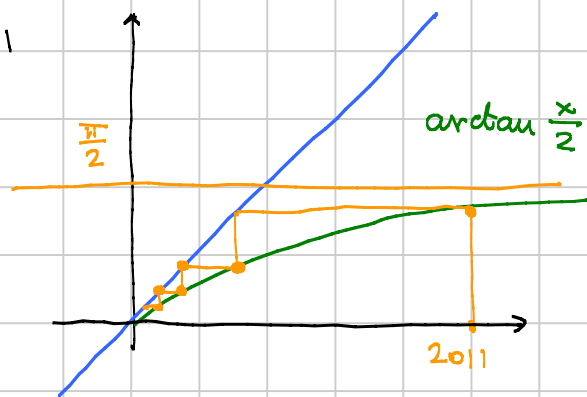
$$x_{2m+2} = f(x_{2m+1}) = f(f(x_{2m}))$$

Quindi x_{2n+2} si ottiene da x_{2n} facendo 2 volte f , quindi volendo posso studiare la successione dei pari data da

$x_{2m} = y_m$ e $y_{m+1} = f(f(y_m))$, che è una successione per ricorrenza costruita a partire da $f(f(x))$ che è una funzione crescente (nota bene: la composizione di due funzioni decrescenti è crescente).

$$x < y \Rightarrow \underbrace{f(x)} > \underbrace{f(y)} \Rightarrow \underbrace{f(f(x))} < \underbrace{f(f(y))} \quad).$$

Exemp 2 $x_{n+1} = \arctan \frac{x_n}{2}$ $x_0 = 2011$



Idea: $x_n \rightarrow 0$ decreciendo

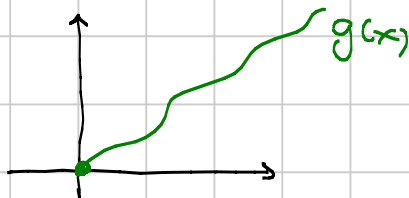
Prima cosa da sistemare: posizione relativa dei due grafici. Bisogna dimostrare che $\arctan \frac{x}{2} < x$ per ogni $x > 0$.

Pouço $g(x) = x - \arctan \frac{x}{2}$ e studio un minimo $g(x)$:

$$g(0) = 0$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{4}{4+x^2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{4+x^2} = \frac{2+x^2}{4+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi g è strettamente crescente, quindi $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$,
che è quello che volevamo. $\uparrow$ $g(x)$



Dimostrazione alternativa della posizione dei 2 grafici:

$$\arctan \frac{x}{2} < \frac{x}{2} < x$$

↑
disuguaglianza classica
 $\arctan y < y \quad \forall y > 0$

vero per $x > 0$
↓
 $< x$

PIANO (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (dec. + lim. inf. + ko. succ. monotone)

(iv) $l = 0$

Dim (ii) 1° modo: ricorrenza + disuguaglianza

Devo dimostrare che $x_{n+1} \leq x_n$, cioè che $\arctan \frac{x_n}{2} \leq x_n$, il che riconduce alla disuguaglianza $\arctan \frac{x}{2} \leq x$, che dallo studio della $g(x)$ sappiamo avere come soluzione $x \geq 0$. Quindi $x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n \geq 0$, ma questo è vero per il p.to (i).

2° modo: induzione + applico f

Passo base: $x_1 \leq x_0$, cioè
 $\arctan \frac{2011}{2} \leq 2011$, vero perché
 $\arctan \frac{2011}{2} \leq \frac{\pi}{2} \leq 2011$

Passo induttivo: Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Dim: prendo l'ipotesi, applico $f(x) = \arctan \frac{x}{2}$ e lascio i versi inalterati in quanto $f(x)$ è monotona crescente

$x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$, cioè $x_{n+2} \leq x_{n+1}$ che è la tesi

Dim (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \arctan \frac{x_n}{2}$$

↓
 $l = \arctan \frac{l}{2}$

Nel risolvere l'eq. $l = f(l)$ torna utile lo studio di $g(x)$ iniziale.

Ultima domanda: come si comporta $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$?

Abbiamo appena dimostrato che $x_n \rightarrow 0$, quindi c'è la condizione necessaria. Provo con il criterio del rapporto.

Intanto osservo che $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (facile indovinare)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{x_n}{2}}{x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} < 1$$

$\uparrow$ uso ricorrenza $\uparrow$ Pongo $x = x_n$
 Quando $n \rightarrow +\infty$
 ho che $x \rightarrow 0$

Quindi la serie converge.

Come si comporta $\sum_{n=0}^{\infty} n^{100} \cdot x_n$?

Pongo $a_n = n^{100} \cdot x_n$ e applico il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{100} x_{n+1}}{n^{100} \cdot x_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{100} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ $\frac{1}{2}$ visto prima

La serie converge.

Esercizio (hard) $x_{n+1} = \arctan x_n$ $x_0 = 2011$

Si vede facilmente (easy) che $x_n \rightarrow 0$

Domanda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{o peggio} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{\alpha}$$



Esercizio (medium)

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

Idea: spiraleggiamento uscente,

con

$$x_{2n} \rightarrow 0$$

$$x_{2n+1} \rightarrow +\infty$$

Dimostrare con le due sottosuccessioni...

