

Successioni per riconvergenza spiraleggianti

Esempio  $x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 2}$   $x_0 = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{3}{x+2}$  Dove interseca la bisettrice?

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} = x \Leftrightarrow 3 = x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = 1$$

Idea dal disegno:  $x_n$  tende ad 1 spiraleggiando, cioè alternando dx e sx.

Due possibili approcci  $\nearrow$  con la distanza  
 $\searrow$  con le due sottosuccessioni

Piano con la distanza Pongo  $d_n = |x_n - 1|$  (distanza dal presunto limite)  
 e dimostro che  $d_n \rightarrow 0$ , il che è equivalente a  
 dire che  $x_n \rightarrow 1$ .

Tipologia di piano:

- (i)  $x_n$  sta in una certa zona per ogni  $n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $d_{n+1} \leq c d_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , dove  $c < 1$  non dipende da  $n$
- (iii)  $0 \leq d_n \leq c^n d_0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (iv)  $d_n \rightarrow 0$ .

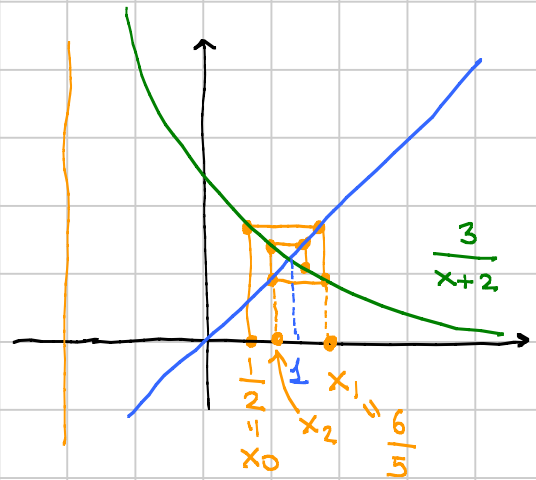
Dim. (iii) Facile inclusione a partire dal p.to (ii) (forse!)

Dim. (iv) Teorema dei carabinieri a partire dal p.to (iii):

$$0 \leq d_n \leq c^n d_0$$

$\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$   
 $0$        $0$        $0$

perché esponenziale con base  $c < 1$  (ovviamente  $c > 0$ )



Punto (i):  $x_0 \leq x_n \leq x_1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$x_1 = f(x_0) = \frac{3}{x_0+2} = \frac{3}{\frac{1}{2}+2} = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

Quindi (i)  $\frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{6}{5}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$

Dim. (i) 1° modo: risolvere le disequazioni (provare...)

2° modo: induzione + applico  $f(x)$

Passo base:  $n=0$   $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq \frac{6}{5}$  banale perché  $x_0 = \frac{1}{2}$

Passo induttivo. Ipotesi:  $\frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{6}{5}$  Tesi:  $\frac{1}{2} \leq x_{n+1} \leq \frac{6}{5}$

Dim. Prendo l'ipotesi e applico  $f(x)$ . Poiché  $f(x)$  è strettamente decrescente nella zona in questione ( $x \in [\frac{1}{2}, \frac{6}{5}]$ ) lo posso fare, ma devo invertire i versi

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{3}{\frac{6}{5}+2} = 3 \cdot \frac{5}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &\geq f(x_n) \geq f\left(\frac{6}{5}\right) \\ \frac{6}{5} &\geq x_{n+1} \geq \frac{15}{16} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi ho ottenuto la tesi.

Resta da fare il p.to (ii) cercando di capire chi è  $c$ .

Dim (ii) "A mano";

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= |x_{n+1} - 1| \stackrel{\text{def. di } d_{n+1}}{=} \stackrel{\text{usando}}{=} \left| \frac{3}{x_n+2} - 1 \right| = \frac{|3-x_n-2|}{|x_n+2|} = \frac{|1-x_n|}{x_n+2} = \frac{|x_n-1|}{x_n+2} \\ &= \frac{d_n}{x_n+2} \leq \frac{d_n}{\frac{1}{2}+2} = \frac{2}{5} d_n \end{aligned}$$

Metto il valore più piccolo possibile per  $x_n$

Quindi ho dimostrato il p.to (ii) con  $c = \frac{2}{5}$ .

Dim. alternativa del p.to (ii) : Lipschitzianità o Lagrange

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricomenta} \\ f(1)=1}}{|f(x_n) - f(1)|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teo. Lagrange} \\ f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)}}{|f'(\xi)| \cdot |x_n - 1|}$$

$$= |f'(\xi)| \cdot d_n$$

$$\leq \max\{|f'(x)| : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{6}{5}\} \cdot d_n$$

$$\max\{|f'(x)| : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{6}{5}\} = \max\left\{\left|\frac{-3}{(x+2)^2}\right| : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{6}{5}\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{3}{(x+2)^2} : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{6}{5}\right\}$$

$$= \frac{3}{\left(\frac{1}{2}+2\right)^2} = 3 \cdot \frac{4}{25} = \frac{12}{25}$$

In questo modo ottengo  $d_{n+1} \leq \frac{12}{25} d_n$  e va bene perché  $c < 1$ .

**PIANO** (i)  $\frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{6}{5}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$

(ii)  $d_{n+1} \leq \frac{2}{5} d_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (opp.  $d_{n+1} \leq \frac{12}{25} d_n$ )

(iii)  $0 \leq d_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n d_0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$

(iv)  $d_n \rightarrow 0$ , cioè  $x_n \rightarrow 1$ .

Oss. 1 Se volessi dimostrare che  $x_n \geq \frac{1}{2}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , non potrei farlo per induzione perché il fatto che  $x \geq \frac{1}{2}$  non garantisce che  $f(x) \geq \frac{1}{2}$ .

Oss. 2 Piano alternativo : (i)  $x_n \geq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (facile induzione)  
(ii)  $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$  ~  
(iii) e (iv) soliti (soliti)

Dim. nuovo p.to (ii) : a mano come prima si arriva a

$$d_{n+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vedi sopra}}}{\frac{d_n}{x_{n+2}}} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso che } x_n \geq 0}}{\frac{d_n}{2}}$$

Piano con le due sottosuccessioni

Idea:  $x_n$  non è monotona, ma

- $x_{2n}$  = sottosuccessione dei pari  
è monotona crescente
- $x_{2n+1}$  = sottosuccessione dei dispari  
è monotona decrescente

PIANO

(i)  $\frac{1}{2} \leq x_{2n} \leq 1$   
 $1 \leq x_{2n+1} \leq \frac{6}{5}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$

(ii)  $x_{2n+2} \geq x_{2n}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (crescente sui pari)  
 $x_{2n+3} \leq x_{2n+1}$  (decrescente sui dispari)

(iii)  $x_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$   
 $x_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$

(iv)  $l = m = 1$ .

Dim. (iii) ... Teorema delle successioni monotone applicato a  $x_{2n}$  e  $x_{2n+1}$

Dim. (iv) Scrivo la ricorrenza e passo al limite:

$$\begin{array}{c} x_{2n+1} = \frac{3}{x_{2n} + 2} \\ \downarrow \\ m = \frac{3}{l+2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x_{2n+2} = \frac{3}{x_{2n+1} + 2} \\ \downarrow \\ l = \frac{3}{m+2} \end{array}$$

Dove prima avevo una equazione in  $l$ , ora ho un sistema in  $m$  ed  $l$ .  
Risolvo il sistema

$$\begin{cases} m = \frac{3}{l+2} \\ l = \frac{3}{m+2} \end{cases} \quad \begin{cases} ml + 2m = 3 \\ lm + 2l = 3 \end{cases}$$

sottraendo ottengo  $m = l$  e poi  
sostituendo  $l^2 + 2l - 3 = 0$ , cioè  
 $l = 1$  oppure  $l = -3$ , ma quest'ultimo  
non è compatibile con p.to (i).