

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 061

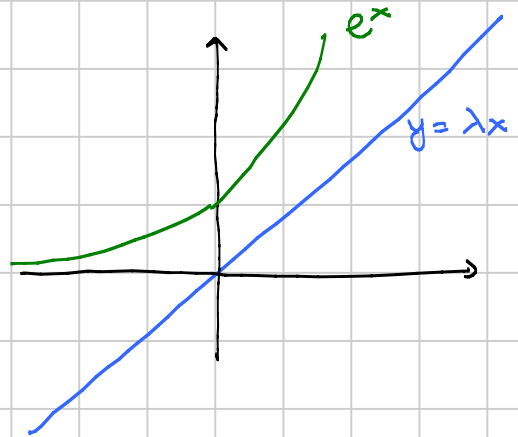
Titolo nota

09/11/2011

Esercizio 1 Trovare la più grande costante $\lambda > 0$ tale che
$$e^x \geq \lambda x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Cosa vuol dire graficamente?
Si tratta di trovare il valore di λ per cui la retta $y = \lambda x$ risulta tangente al grafico di $y = e^x$.



1° modo: SOTTRARRE. Pongo

$$f(x) = e^x - \lambda x$$

La richiesta è equivalente a dire $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi studio la funzione con il parametro λ ed impongo che il suo min (o inf) sia ≥ 0 .

2° modo: DIVIDERE. Vorrei scrivere $\frac{e^x}{x} \geq \lambda$, ma posso solo per $x > 0$.

Allora

- osservo che per $x \leq 0$ la richiesta $e^x \geq \lambda x$ è sempre soddisfatta
- per $x > 0$ posso dividere e mi riduco a

$$\frac{e^x}{x} \geq \lambda$$

Se Voglio che questa sia vera per ogni $x > 0$, λ deve essere minore o uguale del minimo di $\frac{e^x}{x}$ per $x > 0$.

Realizzazione del 2° modo: devo calcolare il minimo di $f(x) = \frac{e^x}{x}$ per $x > 0$. Studio la funzione.
Basterebbe studiarla per $x > 0$,

1 - Simmetrie: nessuna

2 - Definita e continua per $x \neq 0$

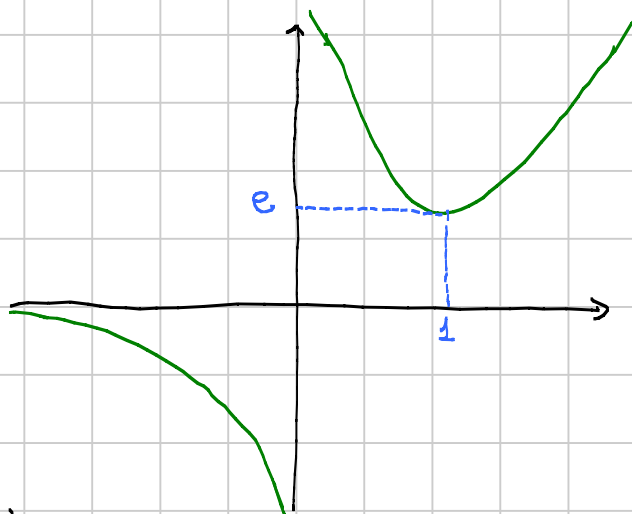
3 - Limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{esponenziale batte polinoma})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \left[= \frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \left[= \frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[\frac{0^+}{-\infty} \right] = 0^-$$

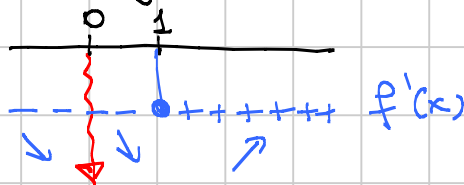


4 - Sulla base dei limiti a 0^+ e a $+\infty$, una variante di Weierstrass garantisce l'esistenza di $\min \{ f(x) : x > 0 \}$ (dimostrare!).

5 - Studio di $f'(x)$, che esiste per ogni $x \neq 0$.

$$f'(x) = \left[\frac{e^x}{x} \right]' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

Perché $x \neq 0$, abbiamo che il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno di $x-1$, quindi



Abbiamo così dimostrato che $f(x) \geq \lambda$ per ogni $x > 0$ se e solo se $\lambda \leq e$ (perché e è il minimo).

Realizzazione del 10 modo Dato studiare $f(x) = e^x - \lambda x$, dove λ è un parametro.

1 - Nessuna simmetria

2 - Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$

3 - limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [0 - (-\infty)] = +\infty$
 uso che $\lambda > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [= +\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \boxed{e^x} \left\{ 1 - \lambda \frac{x}{e^x} \right\} = +\infty$$

$\downarrow$
 $+\infty$

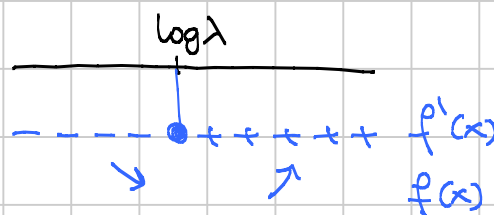
4 - Weierstrass generalizzato garantisce l'esistenza di un pto di minimo.

5 - studio di $f'(x) = e^x - \lambda$. Quindi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda = 0 \Leftrightarrow x = \log \lambda$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda > 0 \Leftrightarrow x > \log \lambda$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda < 0 \Leftrightarrow x < \log \lambda$$



Il valore del minimo è dunque $f(\log \lambda) = e^{\log \lambda} - \lambda \log \lambda$.

Nel sistema 1 voglio che tale minimo sia ≥ 0 .

Questo accade se e solo se

$$e^{\log \lambda} - \lambda \log \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda \log \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda} (1 - \log \lambda) \geq 0$$

$\downarrow$
 > 0

$$\Leftrightarrow 1 - \log \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \log \lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq e$$

Quindi il massimo λ che va bene è $\lambda = e$.

Esercizio 2 $\inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : \arctan(x^2) \leq \lambda \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \} = \frac{\pi}{2}$
 $\sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : \arctan(x^2) \geq \lambda \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \} = 0$

Disegno rapido di $f(x) = \arctan(x^2)$

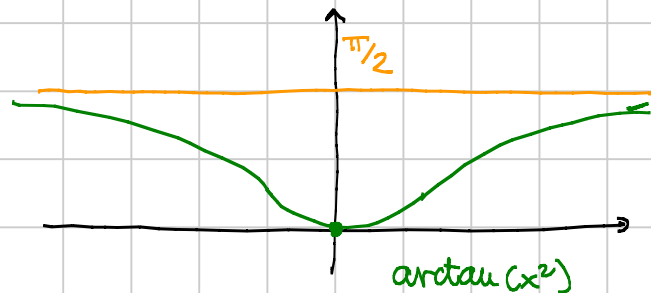
Ho osservato che:

1 - È pari

2 $\rightarrow f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

3 - $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

4 - f è strett. crescente per $x > 0$



Il primo insieme è costituito da tutti i $\lambda \geq \frac{\pi}{2}$

Il secondo insieme è costituito da tutti i $\lambda \leq 0$

Esercizio 3 Calcolare $\max \{ n^2 2^{-n} : n \in \mathbb{N} \}$

Se l'esercizio fosse: calcolare $\max \{ x^2 2^{-x} : x \geq 0 \}$ si tratterebbe di studiare $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$ per $x \geq 0$ (o anche per ogni $x \in \mathbb{R}$)

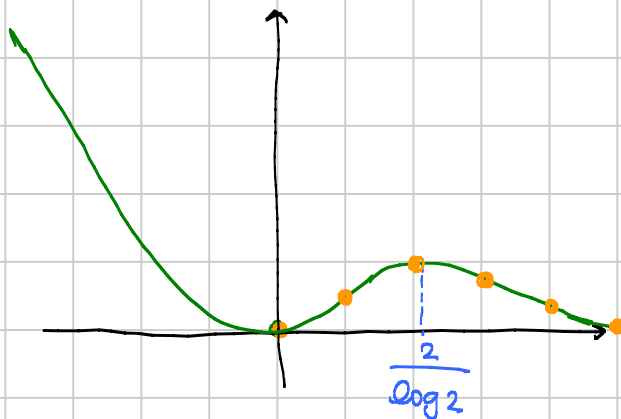
1 - Funzione simmetrica

2 - Definita e continua in $\mathbb{R}$

3 - Limiti agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0^+$$

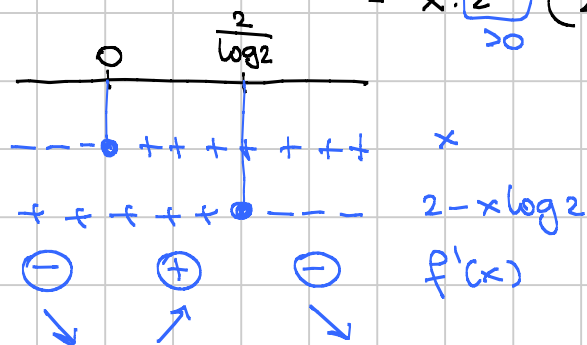
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = [+ \infty \cdot + \infty] = + \infty$$



4 - Zeri e segno: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Nota bene: $f(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

5 - Studio di $f'(x) = 2x \cdot 2^{-x} - x^2 \cdot 2^{-x} \log 2$
 $= x \cdot \underbrace{2^{-x}}_{>0} (2 - x \log 2)$



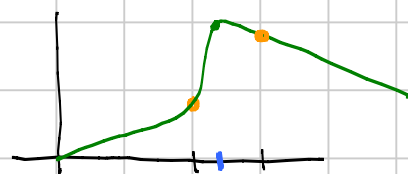
$f\left(\frac{2}{\log 2}\right)$ si può calcolare... quindi

$$\max \{ x^2 \cdot 2^{-x} : x \geq 0 \} = f\left(\frac{2}{\log 2}\right)$$

Cosa succede su $\mathbb{N}$? Vuol dire considerare sul grafico solo i punti con coordinata x intera.

Risposta sbagliata: il p.to di max su $\mathbb{N}$ è l'intero più vicino a $\frac{2}{\log 2}$

Risposta giusta: se lo gioca sempre il p.to intero a dx e quello a sx. Sostituisci fino a quando scende



— 0 — 0 —