

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 060

Titolo nota

09/11/2011

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1- Nessuna simmetria

2- Definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3- Limiti agli estremi della zona di definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = [e^{0^+}] = 1^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = [e^{+\infty}] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = [e^{-\infty}] = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = [e^{0^-}] = 1^-$$

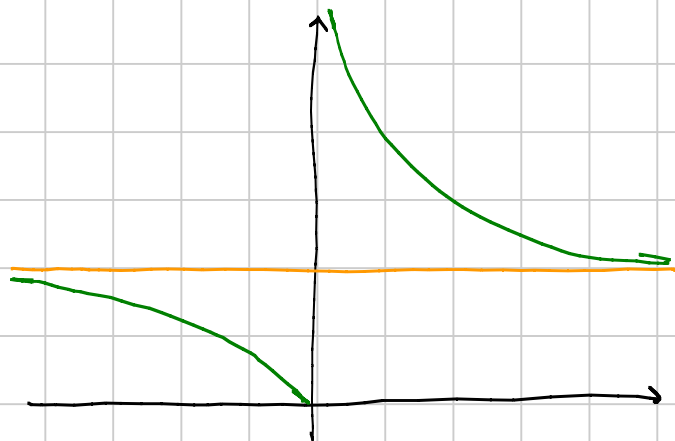
4- Zeri e segno: $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5- Studio della derivata prima.

$f'(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0 \text{ sempre,}$$

il che conferma il grafico.



Achtung! È vero che $f(x)$ è monotona (decrecente) in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?
No! È vero solo che è decrecente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.
Questo perché il legame tra segno della derivata e monotonia vale sugli insiemi convessi (tutto $\mathbb{R}$, semirette, intervalli).

6- Asintoti: $y=1$ è asintoto orizz. sia per $x \rightarrow +\infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$
 $x=0$ è " verticale.

7- Ci aspettiamo che $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^-$ in questo modo.



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad [= 0 \cdot \infty] \quad \text{pongo } y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} -y^2 e^y = \lim_{z \rightarrow +\infty} -z^2 e^{-z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{-z^2}{e^z} = 0$$

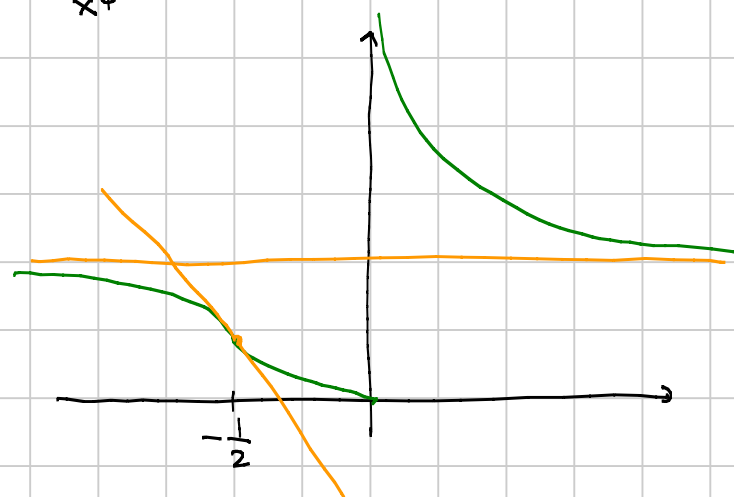
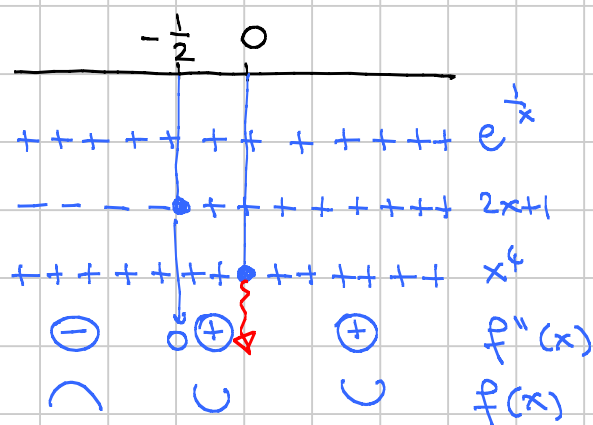
↑
pongo $z = -y$

Questo dice che la retta tangente tende a diventare orizzontale quando $x \rightarrow 0^-$. Ci aspettiamo dunque un flesso per x negativi.

8- Studio della derivata 2ª. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$$f''(x) = + \left\{ +2 \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(+\frac{1}{x^2} \right) \right\}$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left\{ \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right\} = e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x^4}$$



Per esercizio calcolare l'eq. del flesso.

9- $e^{\frac{1}{x}}$ è Lipschitziana in $(-\infty, 0)$? Sì!

La Lipschitzianità è legata alla limitatezza della derivata prima

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in (-\infty, 0) \} = \sup \{ \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} : x \in (-\infty, 0) \}$$

Per vedere se il sup è finito, studio a sua volta $g(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ in $(-\infty, 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^+$$

Per una delle varianti di Weierstrass, si vede che $g(x)$ ammette max, quindi il sup è finito.



Esercizio 2 Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $x^x = \lambda$.

Studio $f(x) = x^x$

1- Definita e continua per $x > 0$

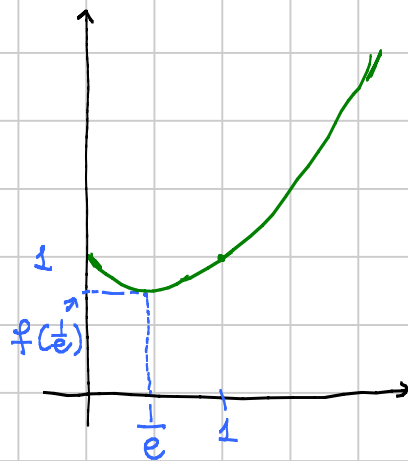
2- Limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = [+\infty^{+\infty}] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x [=0^0] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = e^0 = 1^-$$

(tabellina)

Da queste informazioni, unite al fatto che $f(1) = 1$, ci aspettiamo un pto di minimo per $x \in (0, 1)$



3- Studio di $f'(x) = [e^{x \log x}]' = e^{x \log x} [x \log x]'$

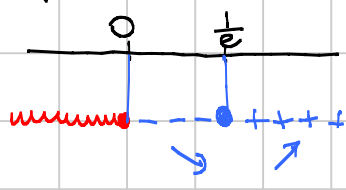
$$= x^x \cdot \left\{ \log x + x \cdot \frac{1}{x} \right\} = \underbrace{x^x}_{>0} \{ \log x + 1 \}$$

Quindi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \log x < -1 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{1}{e})$$



$f'(x)$
 $f(x)$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$$

Quindi al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ avremo

0 soluzioni se $\lambda < \frac{1}{e^{1/e}}$

1 soluzione se $\lambda \in \left\{ \frac{1}{e^{1/e}} \right\} \cup [1, +\infty)$ (per $\lambda = 1$ c'è solo la sol. $x = 1$)

2 soluzioni se $\lambda \in \left(\frac{1}{e^{1/e}}, 1 \right)$

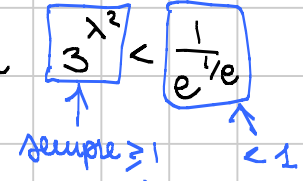
Osservazione 1 Per rispondere alla domanda del testo non serve a nulla studiare $f''(x)$ o cose simili.
Inutile fare cose in più

Osservazione 2 Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni di

$$x^x = 3^{\lambda^2}$$

Soluzione ingenua: ricavo λ $\lambda^2 = \log_3 x^x$ $\lambda = \pm \sqrt{\log_3 x^x}$
e studio la funzione risultante...

Soluzione alternativa: pongo $3^{\lambda^2} = A$ e così mi riduco a $x^x = A$.
Questa ha

- 0 soluzioni se $A < \frac{1}{e^{1/e}}$, cioè se $\boxed{3^{\lambda^2}} < \boxed{\frac{1}{e^{1/e}}}$, quindi mai

- 2 soluzioni se $\frac{1}{e^{1/e}} < A < 1$, cioè se $\frac{1}{e^{1/e}} < \boxed{3^{\lambda^2}} < 1$, quindi mai
- 1 soluzione se $A \geq 1$ (più un caso), cioè se $3^{\lambda^2} \geq 1$, quindi
sempre.

Quindi $x^x = 3^{\lambda^2}$ ha soluzione unica per
ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

— o — o —