

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 059

Titolo nota

05/11/2011

Interpretazione grafica delle succ. per ricorrenza autonome del 1° ordine

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$$

$$x_0 = 2011$$

Disegno $f(x) = \sqrt{3x-2}$

Disegno la bisettrice $y=x$

Bisogna capire $\sqrt{3x-2}$ e x come sono messe tra di loro.

Dove si intersecano? Dove

$$\sqrt{3x-2} = x.$$

Questa ha come soluzioni $x=1$ e $x=2$

(N.B.: è la stessa equazione risolta dai possibili limiti $L \in \mathbb{R}$).

Seguiamo x_0 sull'asse x e poi seguiamo lo slogan "VERTICALE ALLA FUNZIONE, ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE".

Scrivo le coordinate dei p.ti P_i e Q_i così ottenuti

$$P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$$

$$Q_1 = (x_1, x_1)$$

↑ stessa ordinata di P_0
↑ ascissa = ordinata perché sta sulla bisettrice

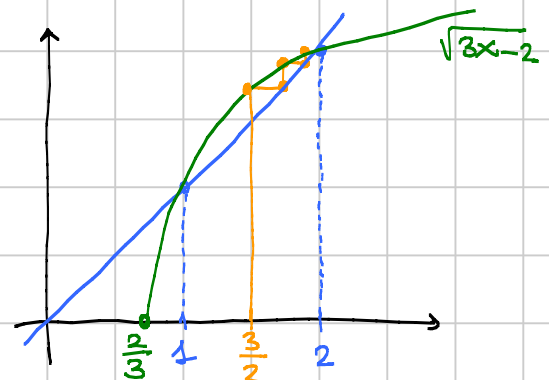
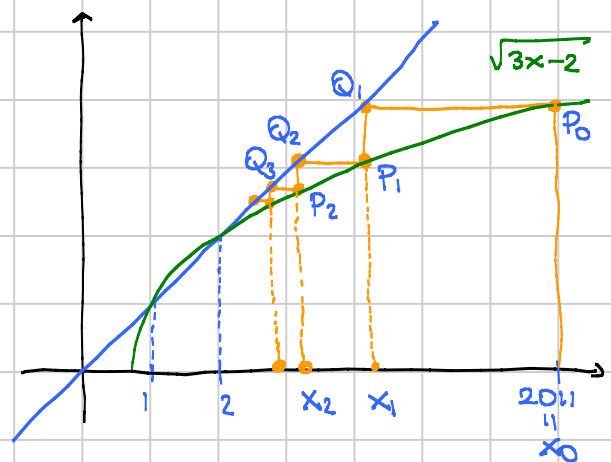
$$P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$$

↑ stessa ascissa di Q_1

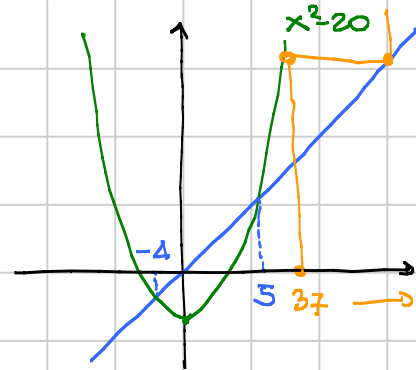
$$Q_2 = (x_2, x_2) \text{ per lo stesso motivo di prima.}$$

Procedendo in questo modo, le ascisse dei p.ti così ottenuti sono i valori successivi della successione: $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$

Se invece parto da $x_0 = \frac{3}{2}$ si vede che $x_n \rightarrow 2$ crescendo.



Caso $x_{n+1} = x_n^2 - 20$, $x_0 = 37$



I piani con la monotonia si deducano dal disegno.

Struttura generale del piano con la monotonia

- (i) limitazione di x_n (deve escludere possibili limiti che non vanno bene e magari permetterci di applicare f)
- (ii) crescenta o decrescenta
- (iii) esistenza del limite (reale, oppure $\pm\infty$)
- (iv) valore di l

Oss. I possibili limiti reali si ottengono risolvendo l'equazione $f(x) = x$.

Basta passare la ricorrenza al limite.

Questo si può fare solo sapendo già che l esiste ed è $\in \mathbb{R}$.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\downarrow$$

$$l = f(l)$$

— o — o —

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2} \quad x_0 = 2011.$$

PIANO CON LA DISTANZA

Considero la distanza dal presunto limite

$$d_n = |x_n - 2|$$

$\uparrow$ presunto limite

Idea: $d_n \rightarrow 0$. Se dimostro che $d_n \rightarrow 0$, allora

$x_n \rightarrow 2$ (sono equivalenti)

- (i) $x_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $d_{n+1} \leq c d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (c deve essere una costante < 1),
- (iii) $0 \leq d_n \leq c^n d_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e indipendente da n
- (iv) $d_n \rightarrow 0$.

P.to (i) è come nel piano con la monotonia

Dim (iv) P.to (iii) + carabinieri

$$0 \leq d_n \leq c^n d_0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

0 0 0

$\rightarrow$ esponenziale con base < 1

Dim. (ii) Il fatto che $d_n \geq 0$ è ovvio perché $d_n = | \dots | \geq 0$
 Resta da dimostrare che $d_n \leq c^n \cdot d_0$.

Idea: $d_1 \leq c d_0$, $d_2 \leq c d_1 \leq c \cdot c d_0 = c^2 d_0$,
 $d_3 \leq c d_2 \leq c \cdot c^2 d_0 = c^3 d_0$

$\uparrow$ p.to (ii) $\uparrow$ p.to (ii) $\uparrow$ $d_1 \leq c d_0$
 $\uparrow$ p.to (ii)

Formalmente: si fa per induzione su n a partire dal p.to (ii)

Passo base: $d_0 \leq c^0 \cdot d_0$ banale

Passo induttivo Ipotesi: $d_n \leq c^n \cdot d_0$ Test: $d_{n+1} \leq c^{n+1} \cdot d_0$

Dim. $d_{n+1} \leq c \cdot d_n \leq c \cdot c^n \cdot d_0 = c^{n+1} d_0$

$\uparrow$ p.to (ii) $\uparrow$ uso ipotesi indutt. per c

Dim. p.to (ii) Devo dimostrare che $d_{n+1} \leq c d_n$, dove c è una costante < 1 indipendente da n .

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= |x_{n+1} - 2| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } d_{n+1}}}{=} \left| \sqrt{3x_n - 2} - 2 \right| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{ricorrenza}}}{=} \left| (\sqrt{\dots} - 2) \cdot \frac{(\sqrt{\dots} + 2)}{(\sqrt{\dots} + 2)} \right| \\
 &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{calcolo}}}{=} \frac{|3x_n - 2 - 4|}{\sqrt{3x_n - 2} + 2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{razionalizzo}}}{=} \frac{|3x_n - 6|}{\sqrt{3x_n - 2} + 2} \stackrel{\substack{\text{Fortuna?}}}{=} \frac{3d_n}{\sqrt{3x_n - 2} + 2}
 \end{aligned}$$

Abbiamo così scoperto che $d_{n+1} \leq \frac{3}{\sqrt{3x_n - 2} + 2} \cdot d_n \leq \frac{3}{4} d_n$

Se voglio questo + grande possibile devo mettere x_n più piccolo possibile, e cioè 2 perché dal p.to (i) so che $x_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Oss. Alla fine il piano si scrive con $c = \frac{3}{4}$.

Cosa sta sotto il pito (ii) del piano con la distanza?

Voglio dimostrare che $d_{n+1} \leq c d_n$. $d_n = |x_n - l|$ ed abbiamo ottenuto l risolvendo $l = f(l)$.

Allora

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |f(x_n) - f(l)| \leq L |x_n - l| = L d_n$$

def. di d_n (under $|x_{n+1} - l|$)
 $x_{n+1} = f(x_n)$
 $l = f(l)$
def. di d_n (under $|x_n - l|$)
 L è la costante di lip di $f(x)$ nella zona in cui stanno x_n ed l

Quindi in generale ottengo $d_{n+1} \leq L d_n$, dove L è la costante di lip. di $f(x)$ nella zona in questione (vedi pito (i) del piano), cioè il sup di $|f'(x)|$ nella zona in questione. Se $L < 1$, il piano con la distanza funziona.

Nell'esempio

$$L = \sup \{ |f'(x)| : \underbrace{x \geq 2}_{\text{pito (i)}} \} = \sup \left\{ \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} : x \geq 2 \right\} = \frac{3}{4} < 1$$

e per questo funziona.

