

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 058

Titolo nota

05/11/2011

Esempio 1 $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$ $x_0 = 2011$

Una formula esplicita è molto probabile che non esista

- PIANO
- (i) $x_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 - (ii) $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 - (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$,
 - (iv) $l = 2$.

Dim. di (i) inclusione + "applico f" $f(x) = \sqrt{3x-2}$

Passo base: $x_0 \geq 2$, cioè $2011 \geq 2$ banale

Passo induttivo: ipotesi: $x_n \geq 2$ tesi: $x_{n+1} \geq 2$

Dim. passo induttivo: prendo l'ipotesi $x_n \geq 2$. Osservo che $f(x)$ è strettamente crescente dove definita, cioè per $x \geq 2/3$. Dall'ipotesi so che sono in questa zona, quindi posso applicare f conservando i versi: ottengo

$$\begin{aligned} f(x_n) &\geq f(2) \\ \text{"} \\ x_{n+1} &\geq \sqrt{6-2} = 2 \end{aligned}$$

Avevo ottenuto $x_{n+1} \geq 2$, ho dimostrato la tesi.

Dim. (ii) inclusione + applico f

Passo base: $x_1 \leq x_0$, cioè $\sqrt{6031} \leq 2011$ vera tranquilla

Passo induttivo: Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ tesi: $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

Dim. passo induttivo: prendo $x_{n+1} \leq x_n$. Applico f : (posso per il p.to (i))
 $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$, cioè $x_{n+2} \leq x_{n+1}$, che è la tesi

Dim (iii) Dal pto (i) so che x_n è debolmente decrescente
 Dal pto (i) so che x_n è limitata inferiormente
 Per il teo. delle succ. monot. si ha che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

Dim (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \sqrt{3x_n - 2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \sqrt{3l - 2} \end{array}$$

Ho ottenuto l'equazione $l = \sqrt{3l - 2}$, $l^2 = 3l - 2$, $l^2 - 3l + 2 = 0$,
 $(l-2)(l-1) = 0$, soluzioni: $l=1$ e $l=2$ (entrambe superano la
 verifica). I possibili limiti sono $l=1$ e $l=2$, ma $l=1$ non è
 compatibile con il pto (i) del piano. Quindi $l=2$.

— 0 — 0 —

Esempio 2 $x_{n+1} = x_n^2 - 20$ $x_0 = 37$

Sembra che x_n sia crescente e $x_n \rightarrow +\infty$.

PIANO

- (i) $x_n \geq 37$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,
- (iv) $l = +\infty$.

Dim. (i) **Induzione + applico f** $f(x) = x^2 - 20$ strett. crescente per $x \geq 0$.

Passo base: $x_0 \geq 37$, cioè $37 \geq 37$, vero

Passo induttivo: **Ipotesi** $x_n \geq 37$ **Tesi**: $x_{n+1} \geq 37$

Dim. prendo l'ipotesi $x_n \geq 37$, osservo che sono nella zona $x \geq 0$,
 quindi applico f conservando i versi

$$\begin{array}{ccc} f(x_n) & \geq & f(37) \\ \text{"} & & \text{"} \\ x_{n+1} & \geq & 37^2 - 20 \geq 1000 \geq 37 \end{array}$$

che implica la tesi.

Dim. (ii) **Induzione + applico f** Devo dim. che $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Passo base: $x_1 \geq x_0$, cioè $37^2 - 20 \geq 37$, abbondante...

Passo induttivo Ipotesi: $x_{n+1} \geq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \geq x_{n+1}$

Dim. Posso applicare $f(x)$ perché dal p.to (i) so già che x_{n+1} e x_n stanno ≥ 37 , dunque ≥ 0 , dunque nella zona in cui $f(x)$ è crescente

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} \geq x_n & \Rightarrow & f(x_{n+1}) \geq f(x_n) \\ & & \text{"} \\ & & x_{n+2} \geq x_{n+1} \end{array}$$

Oss. Per dimostrare il p.to (ii) basterebbe un p.to (i) con $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Tuttavia un p.to (i) di questo tipo non si riesce a dimostrare immediatamente per induzione (Detto altrimenti: è più facile dim. che $x_n \geq 37$ piuttosto che $x_n \geq 0$)

Dim. (iii) Dal p.to (ii) so che x_n è debolmente crescente.

Il teorema delle successioni monotone dice che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (N.B.: il p.to (i), cioè la limitazione inferiore, non serve a nulla in questa fase).

Dim. (iv) Supponiamo per assurdo che $l \in \mathbb{R}$. Allora posso passare al limite nella ricorrenza:

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = x_n^2 - 20 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ l = l^2 - 20 & & \end{array}$$

Ho ottenuto $l = l^2 - 20$, cioè $l^2 - l - 20 = 0$, cioè $(l-5)(l+4) = 0$, cioè $l = 5$ oppure $l = -4$. Entrambi i valori sono incompatibili con il p.to (i)

Oss. È chiaro che nel p.to (i) posso sostituire 37 con qualunque numero > 5 .

— 0 — 0 —

Esempio 3 $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$ $x_0 = \frac{3}{2}$

- PIANO**
- (i) $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 - (ii) $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 - (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ((ii) + (i) + teo. succ. monotone)
 - (iv) $l = 2$. (i possibili limiti sono $l=1$ e $l=2$, ma $l=1$ è incompatibile con (i))

Dim (i) **Inclusione + applico f** $f(x) = \sqrt{3x-2}$

Passo base $n=0$ $\frac{3}{2} \leq x_0 \leq 2$ banale perché $x_0 = \frac{3}{2}$

Passo induttivo **Ipotesi:** $\frac{3}{2} \leq x_n \leq 2$ **Tesi:** $\frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq 2$

Dim: prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ (posso perché per ipotesi è tutto sopra $2/3$, cioè nella zona in cui $f(x)$ è crescente). Ottengo

$$\begin{array}{ccccc} f\left(\frac{3}{2}\right) & \leq & f(x_n) & \leq & f(2) \\ \frac{3}{2} & \leq & \sqrt{\frac{5}{2}} & \leq & x_{n+1} & \leq & 2 \\ & \uparrow & & & & & \\ & \text{spero} & & & & & \end{array}$$

Se la speranza funziona ho la tesi. Controllo la speranza

$$\frac{3}{2} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \stackrel{?}{\leq} \frac{5}{2} \Leftrightarrow 18 \stackrel{?}{\leq} 20 \quad \text{OK.}$$

Dim (ii) **Inclusione + applico f** (Dettagli per esercizio).