

Successioni per ricorrenzaEsempio

$x_0 = 1$

$x_{n+1} = 2x_n + 1$

dato iniziale

regola di passaggio da un termine al successivo

Questo permette di calcolare iterativamente i successivi valori della succ.:

$$x_1 = 2x_0 + 1 = 3, \quad x_2 = 2x_1 + 1 = 7, \quad x_3 = 2x_2 + 1 = 15, \quad x_4 = 2x_3 + 1 = 31, \dots$$

Per sapere il valore di un termine della successione, occorre calcolare prima tutti i precedenti.

Più in generale:

$x_0 = \text{qualcosa di dato} \quad x_{n+1} = f(x_n)$

Successione per ricorrenza

→ del 1° ordine (dipendenza dal termine precedente)

→ autonoma (x_{n+1} dipende da x_n , ma non da n)Esempio non autonomo

$x_0 = 1$

$x_{n+1} = 2x_n + n$

dipendenza dal termine precedente (1° ordine)
e da n (non autonomo)

$x_0 = \text{qualcosa di dato}, \quad x_{n+1} = f(x_n, n)$

1° ordine, non autonomo

Nell'esempio: $x_1 = 2$

$x_1 = 2x_0 + 0 = 2$

↑
regola di passaggio con $n=0$

$x_3 = 2x_2 + 2 = 12$

$x_2 = 5 = 2x_1 + 1$

↑
regola con $n=1$

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$

2° ordine (dipendenza dai 2 termini precedenti, autonomo)

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, n)$

2° ordine non autonomo.

Se la ricorrenza è di ordine k , occorrono k condizioni iniziali per avviare la procedura.Oss. In alcuni casi fortunati si può trovare una FORMULA ESPLICITA.

Obiettivo teoria generale: determinare il comportamento della successione senza disporre di una formula generale.

Esempio 1 $x_{n+1} = x_n^2$, $x_0 = \frac{3}{4}$ Sarebbe possibile determinare la formula esplicita (esercizio!)

$$x_1 = \frac{9}{16}, \quad x_2 = \frac{81}{256}$$

Semberebbe che x_n sia decrescente e $x_n \rightarrow 0$. Come dimostrarlo?

PIANO

- (i) $0 \leq x_n \leq \frac{3}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$,
- (iv) $l = 0$.

Se dimostro i vari p.ti del piano, ho quello che volevo. Ogni p.to va dimostrando usando, se serve, i p.ti precedenti.

Dim. (iii) Dal p.to (ii) so che a_n è debolmente decrescente
Dal p.to (i) so che a_n è limitata inferiormente (uso s.d.o. anzò)
Pertanto il teo. delle successioni monotone garantisce l'esistenza di un limite reale.

Dim. (iv) Scrivo la ricorrenza $x_{n+1} = x_n^2$
p.to (iii) $\rightarrow \downarrow \quad \downarrow \leftarrow$ uso p.to (iii)
 $l = l^2$

$l = l^2 \Leftrightarrow l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l(l-1) = 0$. Quindi l può essere 0 oppure 1. Ma per il p.to (i) (e qui uso la parte $a_n \leq \frac{3}{4}$) so che l non può essere 1, quindi per forza $l = 0$.

Dim. (i) Dimostro intanto che $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo è vero per $n=0$ e poi banale per ogni n successivo in quanto $x_{n+1} = x_n^2$ e i quadrati sono ≥ 0 .
Resta da dimostrare che $x_n \leq \frac{3}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Lo dim. per induzione.

Passo base $n=0$ $x_0 \leq \frac{3}{4}$ Ovvio perché $x_0 = \frac{3}{4}$.

Passo induttivo Ipotesi: $x_n \leq \frac{3}{4}$ Tesi: $x_{n+1} \leq \frac{3}{4}$

Dim. $x_{n+1} = x_n^2 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \leq \frac{3}{4}$

↑
uso ricor.

↑
ipotesi elevata al quadrato!

Lo posso fare perché so già che $x_n \geq 0$
e x^2 è monotona crescente per $x \geq 0$.

Ho fatto una catena di uguaglianze e disuguaglianze da cui deduco
che $x_{n+1} \leq \frac{3}{4}$, che è la tesi.

Dim. (ii)

1° modo: ricorrenza più disuguaglianze

Devo dimostrare che $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la ricorrenza
questo è come dire $x_n^2 \leq x_n$. Questa è legata alla disuguaglianza
 $x^2 \leq x$, cioè $x^2 - x \leq 0$, cioè $x(x-1) \leq 0$, cioè $0 \leq x \leq 1$.

Quindi $x_n^2 \leq x_n \Leftrightarrow 0 \leq x_n \leq 1$. Grazie al pto (i) so che
 $0 \leq x_n \leq \frac{3}{4}$, dunque a maggior ragione $0 \leq x_n \leq 1$, dunque
 $x_n^2 \leq x_n$, che è quello che volevo.

2° modo: induzione + "applico f"

Voglio dimostrare per induzione che
 $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passo base $n=0$. Devo dim. che $x_1 \leq x_0$, cioè $\frac{9}{16} \leq \frac{3}{4}$, che è vero.

Passo induttivo: Ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$ Tesi: $x_{n+2} \leq x_{n+1}$

regola di
passaggio

Dim. passo induttivo: prendo l'ipotesi $x_{n+1} \leq x_n$ e applico $f(x) = x^2$

Posso farlo senza cambiare i versi? Cioè posso scrivere

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \quad ?$$

Sì, posso perché $f(x) = x^2$ è monotona crescente per $x \geq 0$ e noi
sappiamo dal pto (i) che $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi da $x_{n+1} \leq x_n$ possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &\leq x_n^2 \\ x_{n+2} &\leq x_{n+1} \end{aligned}$$

Sostanzialmente:

- prendo l'ipotesi $(x_{n+1} \leq x_n)$
- applico f $(f(x_{n+1}) \leq f(x_n))$
- ottengo la tesi $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ x_{n+2} & \leq & x_{n+1} \end{matrix}$

Achtung! Bisogna verificare la possibilità di applicare $f(x)$ conservando i versi,

— o — o — o —