

LIPSCHITZIANITÀ

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è Lipschitziana in A se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

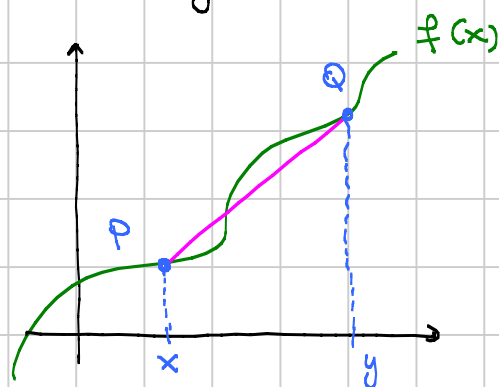
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x \in A, \forall y \in A.$$

La più piccola costante L che fa funzionare la definizione si dice costante di Lipschitz di $f(x)$ in A .

Significato geometrico Se $x \neq y$ posso riscrivere la disug. come

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$$

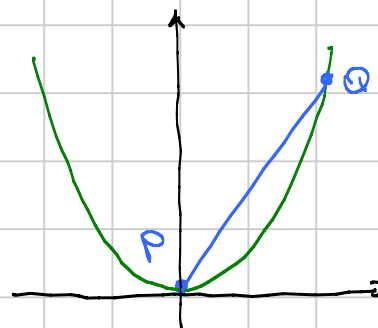
coeff. angolare retta PQ



Quindi $f(x)$ è lip. se e solo se tutte le rette che congiungono 2 p.ti del grafico hanno pendenza (cioè coeff. angolare) in $[-L, L]$, cioè il grafico ha "pendenza limitata"

Intuitivamente: $f(x) = x^2$ è lip. in $\mathbb{R}$? NO! basta prendere l'origine ed un p.to "molto grande" per avere rette di pendenza enorme

$f(x) = x^2$ è lip. in $[0, 1]$? SÌ! Lì le pendenze sono limitate.



$f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[0, 1]$? NO! Prendo P nell'origine e Q molto vicino a 0.

$f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[1, +\infty)$? SÌ! Ormai il grafico ha "spianato".



Legami tra Lipschitzianità e derivata prima.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso (retta, semiretta, intervallo), e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

Allora f è lip. in $A \Leftrightarrow |f'(x)|$ è limitata in A

Inoltre la costante di Lipschitz di $f(x)$ in A è data dalla formula
$$\sup \{ |f'(x)| : x \in A \}.$$

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$ Ipotesi: $|f'(x)|$ è limitata in A , cioè esiste $M \in \mathbb{R} \neq 0$.
 $|f'(x)| \leq M$ per ogni $x \in A$.

Tesi: $f(x)$ è lip. in A .

$$|f(x) - f(y)| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{|f'(\xi)|} \cdot |x - y| = |f'(\xi)| \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{|x - y|} \leq M \cdot |x - y|$$

Questo mostra la disuguaglianza richiesta con $L = M$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ipotesi: $f(x)$ è lip. in A

Tesi: $f'(x)$ è limitata in A .

Prendo $x_0 \in A$. Allora

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L|h|}{|h|} = L$$

ho usato che

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq L|(x_0+h) - x_0|$$

leggermente più delicato è dimostrare che la costante di lip. è proprio il sup di $|f'(x)|$ (esercizio medium).

Esempio 1 $f(x) = x^2$ $A = \mathbb{R}$ $\sup \{ |f'(x)| : x \in A \} = \sup \{ |2x| : x \in \mathbb{R} \} = +\infty$
e quindi $f(x)$ NON è Lipschitziana in $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 \quad A = [0, 1] \quad \sup \{ |f'(x)| : x \in A \} = \sup \{ |2x| : x \in [0, 1] \} = 2$$

$\Rightarrow f(x)$ è lip. con costante 2 in $[0, 1]$.

Conseguenza: $|x^2 - y^2| \leq 2|x - y| \quad \forall x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1]$

Si poteva anche dimostrare osservando che

$$|x^2 - y^2| = \underbrace{|x + y|}_{\leq 2 \text{ perché } x \text{ e } y \text{ sono in } [0, 1]} \cdot |x - y| \leq 2|x - y|.$$

Se voglio avvicinarmi alla pendenza massima 2, devo prendere x e y vicini ad 1.



Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$, $A = [1, +\infty)$

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in [1, +\infty) \} = \sup \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}} : x \in [1, +\infty) \right\} = \frac{1}{2}$$

Quindi $\sqrt{x}$ è Lip. in $[1, +\infty)$ con costante $\frac{1}{2}$, cioè

se voglio $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ + grande pos.
devo prendere x + piccolo
possibile, cioè $x = 1$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2} |x - y| \quad \forall x \geq 1, \forall y \geq 1.$$

La stessa cosa si poteva dimostrare per via elementare osservando che

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| = |x - y| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

$\leq \frac{1}{2}$ (denominatore più piccolo possibile).

Esempio 3 $\sin x$ e $\cos x$ sono Lip. in $\mathbb{R}$? Sì

$$\text{Prendiamo } f(x) = \sin x : \sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ |\cos x| : x \in \mathbb{R} \} = 1$$

Discorso analogo per $\cos x$

Esempio 4 $f(x) = \arctan x$ è Lip. in $\mathbb{R}$? Sì, con costante 1

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\} = 1$$

Disuguaglianze classiche di Lipschitzianità

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad " \quad "$$

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y| \quad " \quad "$$

Seguono banalmente dal fatto che $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$ sono Dip. in $\mathbb{R}$ con costante 1.

Esempio 5 $f(x) = \sin x^2$ è Dip. in $[0, 127]$?

$\sup \{ |f'(x)| : x \in [0, 127] \}$ Questo viene per forza un numero reale (e non $+\infty$) perché è il max di una funzione continua su un intervallo con estremi compatti (Weierstrass).

E su tutto $\mathbb{R}$? Non Lipschitziana

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ |2x \cdot \cos(x^2)| : x \in \mathbb{R} \} = +\infty$$

↑
posso prendere x molto grande con $\cos(x^2) \approx 1$

