

Convessità Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se, per ogni coppia di p.ti a, b in A si ha che tutto l'intervallo $[a, b] \subseteq A$.

Quali sono i sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ che sono convessi? Sono di 3 tipi:

- * $A = \mathbb{R}$
- * le semirette $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$
- * gli intervalli, con o senza estremi $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) .

Def. (geometrica) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se, per ogni coppia di p.ti P e Q del grafico, si ha che tutto il segmento PQ sta "sopra" il grafico. Si dice concava se il segmento sta sempre "sotto" il grafico.

Esempi $f(x) = x^2$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$

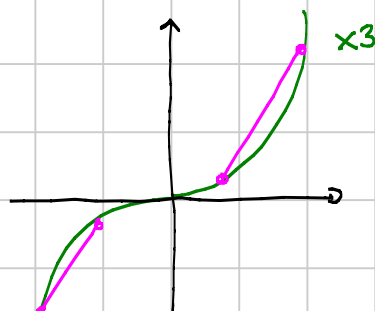
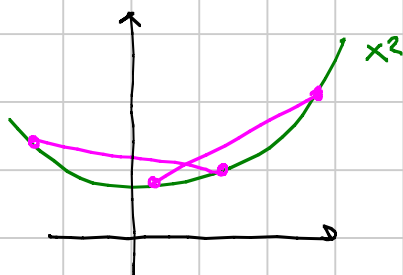
$f(x) = x^3$ è convessa in $[0, +\infty)$

è concava in $(-\infty, 0]$

$f(x) = \arctan x$ è concava in $[0, +\infty)$

è convessa in $(-\infty, 0]$

$f(x) = |x|$ è convessa ovunque



Oss. Quella che abbiamo definito si potrebbe chiamare funzione debolmente convessa (il segmento PQ può coincidere con un tratto di grafico).

La funzione si dice strettamente convessa se il segmento sta sempre strettamente sopra il grafico, tranne negli estremi.

Così $f(x) = |x|$ è convessa, ma non strettamente convessa.

Def (algebraica) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B, \forall \lambda \in [0,1]$$

Collegamento tra le 2 definizioni. Siano $a \in A, b \in B, \lambda \in [0,1]$.

Cosa rappresenta $\lambda a + (1-\lambda)b$? $\lambda=0 \rightsquigarrow b$

$$\lambda=1 \rightsquigarrow a$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{a+b}{2}$$

L'espressione $\lambda a + (1-\lambda)b$ rappresenta, al variare di $\lambda \in [0,1]$, tutti i pti dell'intervallo $[a,b]$

La convessità dice che

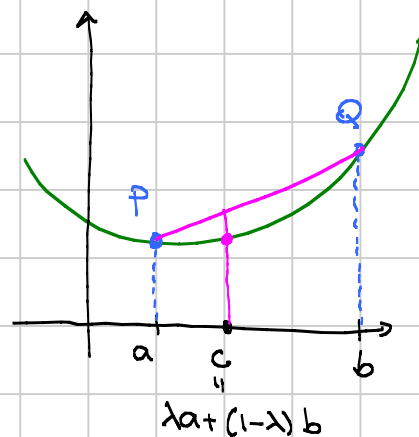
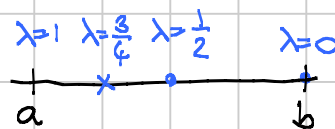
$$f(c) \leq \text{eq. della retta calcolata in } c$$

Scrivendo l'equazione della retta PA e calcolando il suo valore per $x=c$ si ottiene

$$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Quindi

$$\underbrace{f(\lambda a + (1-\lambda)b)}_{\text{valore di } f \text{ in } c} = \underbrace{\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)}_{\text{valore della retta in } c.}$$



Oss. Una funzione convessa non è obbligata ad essere derivabile ovunque (ad esempio $f(x) = |x|$ è convessa, ma $f'(0)$ non esiste).

Convessità e derivata seconda Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso, e sia

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $f''(x)$ esista per ogni $x \in A$. Allora

(1) $f''(x) > 0$ per ogni $x \in A \Rightarrow f$ strettamente convessa

(2) $f''(x) \geq 0$ " " $\Rightarrow f$ (debolmente) convessa

(3) f strett. convessa $\Rightarrow f''(x) > 0$ per ogni $x \in A$ **FALSA**

(4) f (debolmente) convessa $\Rightarrow f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$.

Esempio $f(x) = x^4$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$, ma $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, ma si annulla per $x=0$

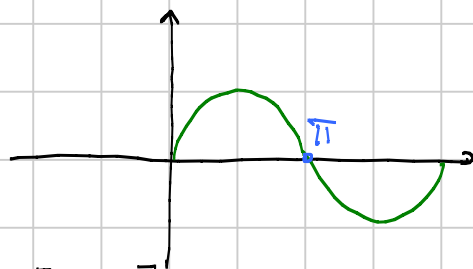
Operativamente: le zone di concavità / convessità si possono studiare esaminando il segno di $f''(x)$ (se questa esiste).

Esempio 1 $f(x) = \sin x$ Sembrerebbe

* concava in $[0, \pi]$

* convessa in $[\pi, 2\pi]$

Infatti $f''(x) = -\sin x$ è ≤ 0 in $[0, \pi]$ e ≥ 0 in $[\pi, 2\pi]$



Esempio 2 $f(x) = x e^{-x}$

Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, senza particolari simmetrie.

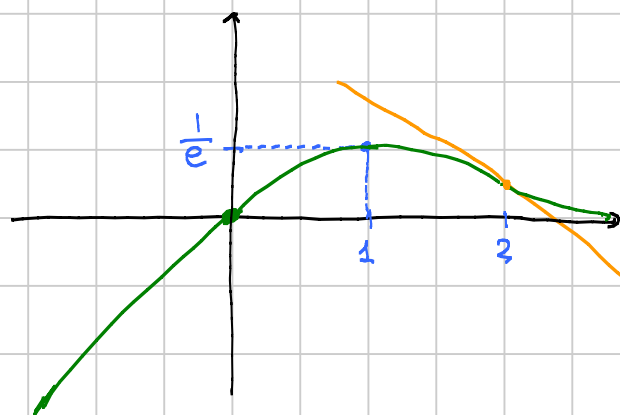
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

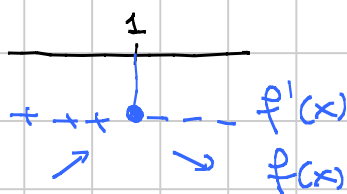


$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x} (1-x)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

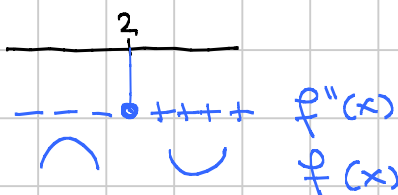


$$f''(x) = -e^{-x} (1-x) - e^{-x} = e^{-x} (-1+x-1) = e^{-x} (x-2)$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$



Oss. geometrica Per le funzioni concave il grafico sta sopra le rette tangenti.

Per le funzioni concave il grafico sta sotto le rette tangenti.

Nei p.ti di passaggio da convessa a concava il grafico sta sopra da una parte e sotto dall'altra, quindi il grafico "attraversa" la retta tangente (p.ti di FLESSO)

Achtung! Dove $f''(x) = 0$ non è detto che ci sia un p.to di flesso (con attraversamento). Pensare a $f(x) = x^4$ con $f''(x) = 12x^2$ che si annulla per $x = 0$, che è p.to di minimo.
— 0 — 0 —

Disuguaglianze classiche

$$\begin{aligned} \sin x &\leq x \quad \text{per ogni } x \geq 0 \\ e^x &\geq 1+x \quad \text{per ogni } x \geq 0 \\ \arctan x &\leq x \quad \text{per ogni } x \geq 0 \\ \log(1+x) &\leq x \quad \text{per ogni } x \geq 0 \end{aligned}$$

} In tutti i casi vale il segno di uguale $\Leftrightarrow x = 0$

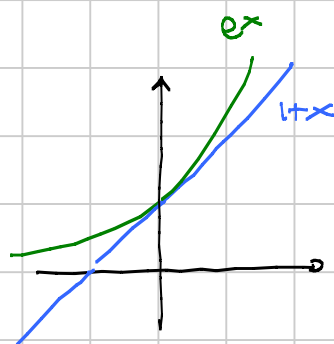
Queste si dimostrano tutte studiando la monotonia di una funzione opportuna: $x - \sin x$, $e^x - 1 - x$, $x - \arctan x$, $x - \log(1+x)$

Nel caso di e^x si possono fare 3 dimostrazioni:

(1) Studio di $e^x - 1 - x$

(2) Taylor-Lagrange

(3) Osservare che $y = x+1$ è la retta tangente al grafico in $x=0$, e $f(x) = e^x$ è convessa, dunque sta sopra la tangente



Esercizio Trovare una disug. per $\cos x$ $\left[\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \geq 0 \right]$