

Formula di Taylor con resto di Lagrange Caso con centro in $x_0 = 0$

$$f(x) = \boxed{P_n(x)} + \boxed{o(x^n)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$\downarrow$ polinomio di grado $\leq n$ $\downarrow$ resto in forma di o piccolo (resto di PEANO)

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}} \quad \text{dove } \xi \text{ sta tra } 0 \text{ e } x$$

$\downarrow$ resto scritto alla LAGRANGE

In maniera estesa:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Se il centro è in un pto x_0 generico, allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

dove ξ è un opportuno pto che sta tra x_0 e x

Oss. Nel caso $n=0$ la formula diventa $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$,
cioè $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0)$, che è il teorema di Lagrange.

Dim.: facciamo il caso $x_0 = 0$. Poichè

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Dobbiamo dimostrare che $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, cioè

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Chiamo $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Cosa posso dire delle derivate di $\varphi(x)$ calcolate in 0? Vediamo per $P_n(x)$

$$P_n(0) = f(0), \quad P_n'(0) = f'(0), \quad P_n''(0) = f''(0), \text{ e in generale } P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \text{ per } k = 0, 1, \dots, n.$$

Inoltre $P_n^{(n+1)}(0) = 0$, e anzi $P_n^{(n+1)}(x) = 0$ perché il polinomio ha grado $\leq n$.

Di conseguenza

$$\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - f^{(k)}(0) = 0 \text{ per } k = 0, 1, \dots, n$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

Cosa possiamo dire della derivata k -esima di x^{n+1} . Si ha che

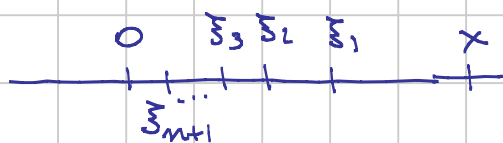
$$\frac{d^k (x^{n+1})}{dx^k}(0) = 0 \text{ per } k = 0, 1, \dots, n \text{ e}$$

$$\frac{d^{n+1} (x^{n+1})}{dx^{n+1}}(x) = (n+1)! \text{ per ogni } x.$$

Cauchy 1

Cauchy 2

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} &= \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} \stackrel{\text{Cauchy 1}}{=} \frac{\varphi'(\xi_1)}{(n+1)\xi_1^n} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(0)}{(n+1)\xi_1^n - (n+1)0^n} \stackrel{\text{Cauchy 2}}{=} \\ &= \frac{\varphi''(\xi_2)}{(n+1) \cdot n \cdot \xi_2^{n-1}} = \frac{\varphi''(\xi_2) - \varphi''(0)}{(n+1) \cdot n \cdot \xi_2^{n-1} - (n+1) \cdot n \cdot 0^{n-1}} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \end{aligned}$$



— 0 — 0 —

Applicazioni: $\rightarrow$ Calcolo di valori approssimati
 $\rightarrow$ Dimostrazione di disuguaglianze.

Esempio 1 Calcolare approssimativamente $\sin \frac{1}{10}$.

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} x^7$$

Taylor-Lagrange per $\sin x$
 con $n = 6$

Quindi uso la formula con $x = \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{10} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10^3} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{10^5} + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} \frac{1}{10^7} \\&= \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12.000.000} + \text{resto} \\&= \frac{1.200.000 - 2.000 + 1}{12.000.000} + \text{resto} \\&= \frac{1.198.001}{12.000.000} + \text{resto}\end{aligned}$$

Se dico che $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{1.198.001}{12.000.000}$ commetto un errore che è

$$\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} \cdot \frac{1}{10^7} \quad \text{quindi } |\text{errore}| \leq \frac{|f^{(7)}(\xi)|}{7!} \cdot \frac{1}{10^7} \leq \frac{1}{5.040 \cdot 10^7}$$

$\uparrow$
 $f^{(7)}$ è $\sin$ o $\cos$

Riprova: $\frac{1.198.001}{12.000.000} = 0,099833416 \quad \sin \frac{1}{10} = 0,099833416$

Esempio 2 Stessa cosa fermandosi un termine prima:

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5$$

$$\sin \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \frac{1}{10^5}$$

$\frac{599}{6000}$

Se dico $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{599}{6000}$ commetto un errore tale che

$$|\text{errore}| = \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!} \cdot \frac{1}{10^5} \leq \frac{1}{12.000.000}$$

Riprova $\frac{599}{6000} = 0,099833\boxed{33}$

$\uparrow$ errore di 1 sulla 7ª cifra decimale.

Esempio 3 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con uguaglianza se e solo se $x=0$.

Taylor Lagrange con $n=1$: $e^x = 1+x + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} x^2 = 1+x + \frac{e^\xi}{2} x^2 \geq 1+x$

≥ 0 sempre
 $e=0 \Leftrightarrow x=0$

Esempio 4 Dimostrare che $\arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$

Modo 1 Taylor-Lagrange con $n=1$

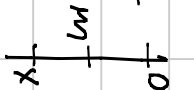
$$\arctan x = x + \frac{f''(\xi)}{2} x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{ quindi}$$

$$\arctan x = x - \frac{\xi}{(1+\xi^2)^2} x^2$$

Se $x=0$ c'è uguaglianza. Se $x>0$, allora $\xi>0$, dunque

$$\arctan x = x - \text{roba positiva} < x$$

Se $x<0$, allora $\xi<0$ , dunque

$$\arctan x = x - \text{roba negativa} > x$$

Modo 2 Studio la funzione $f(x) = x - \arctan x$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\cancel{1+x^2}-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

con uguaglianza se e solo se $x=0$. Quindi

$f'(x) \geq 0$ sempre con annullamento sporadico.

Monotonia $\Rightarrow f$ è strett. crescente,

quindi

$f(x) > 0$ per $x > 0$, cioè $x > \arctan x$ per $x > 0$

$f(x) < 0$ per $x < 0$, cioè $x < \arctan x$ per $x < 0$.

