

Esempio 1 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1}$

Visto prima:

$x = \pm 1$ asintoti verticali

$x = x+3$ asintoto obliquo a $+\infty$ e a $-\infty$.

$$f(x) - x - 3 = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1} - x - 3 = \frac{\cancel{x^3} + 3\cancel{x^2} - \cancel{x^3} - 3\cancel{x^2} + x + 3}{x^2 - 1} = \frac{x+3}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - 3 = 0^+ \quad (\text{numeratore e denom.} > 0 \text{ per } x \text{ grande})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x - 3 = 0^- \quad (\text{num.} < 0 \text{ e denom.} > 0 \text{ per } x \text{ molto neg.})$$

Volendo fare il grafico:

→ Simmetrie: nulla

→ Definita e continua per $x \neq \pm 1$

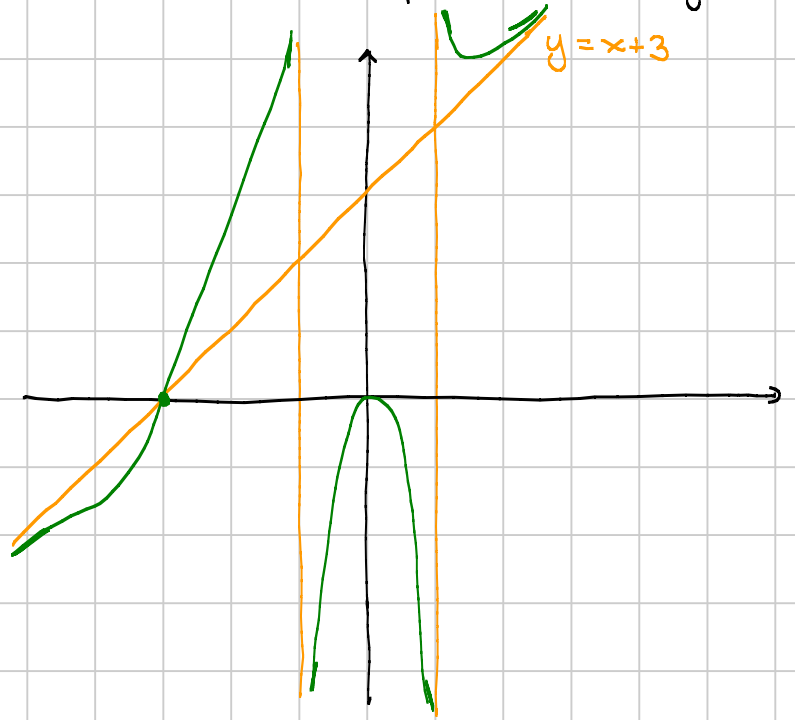
→ Limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$



Esaminando il tratto per $x \in (-\infty, -1)$ deduco che ci deve essere un attraversamento dell'asintoto, cioè un pto in cui $f(x) - x - 3 = 0$.

Ma già sappiamo che $f(x) - x - 3 = \frac{x+3}{x^2-1}$, quindi $x = -3$

Per avere una conferma bisogna controllare il segno della derivata.

Esempio 2 Risolvere l'equazione $x + 2 \sin x = 0$
 $f(x)$

Intanto c'è la soluzione $x = 0$.

Non ci sono soluzioni se $x > 2$ oppure $x < -2$ (perché $f(x) > 0$ per ogni $x > 2$ e $f(x) < 0$ per ogni $x < -2$).

Quindi mi limito a studiare $f(x)$ per $x \in [-2, 2]$, oppure $x \in [-\pi, \pi]$

→ funzione dispari, definita e continua in tutto $[-\pi, \pi]$.

→ valori agli estremi dell'intervallo: $f(\pi) = \pi$, $f(-\pi) = -\pi$

→ Zeri e segno: non li so fare

→ Studio la monotonia (limito a $[-\pi, \pi]$)

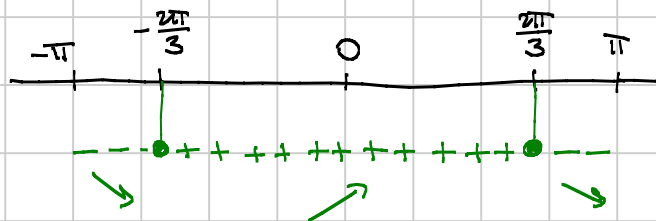
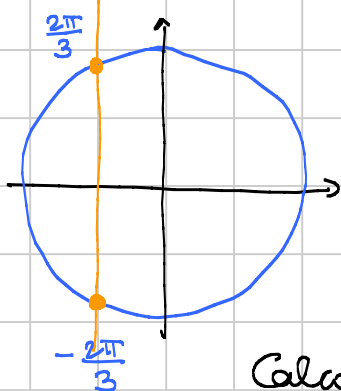
$$f'(x) = 1 + 2 \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \quad x = -\frac{2\pi}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

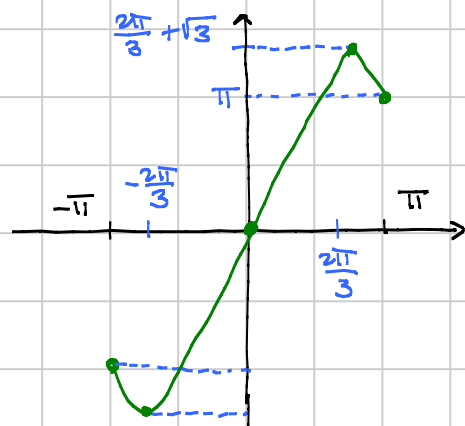
$$x \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$



Calcolo $f\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{2\pi}{3} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$



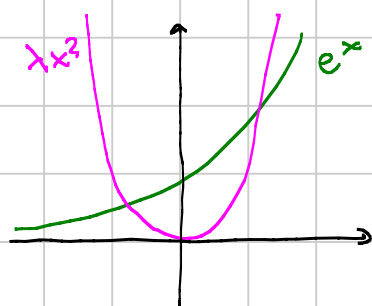
Conclusione: dopo aver studiato il segno di $f'(x)$ conosco il grafico di $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ e posso rispondere alla domanda su zeri e segno.
 Quindi $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

— o — o —

Esempio 3 Determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$

Prima idea:



Ci sono 2 soluzioni

Seconda idea: la prima è corretta per $\lambda > 0$, mentre per $\lambda \leq 0$ la parabola è verso il basso e non ci sono soluzioni

Quindi: $\rightarrow$ 0 soluzioni per $\lambda \leq 0$

$\rightarrow$ 2 soluzioni per $\lambda > 0$.

Achtung! Sovrapporre 2 grafici è MOLTO PERICOLOSO!!

Idea corretta: trasformare il problema in $f(x) = \lambda$ per una opportuna $f(x)$.

Dividendo per x^2 ottengo

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

(oss.: posso dividere per x perché $x=0$ non è mai soluzione, quindi non la posso perdere dividendo).

Studio $f(x)$.

$\rightarrow$ Nessuna simmetria

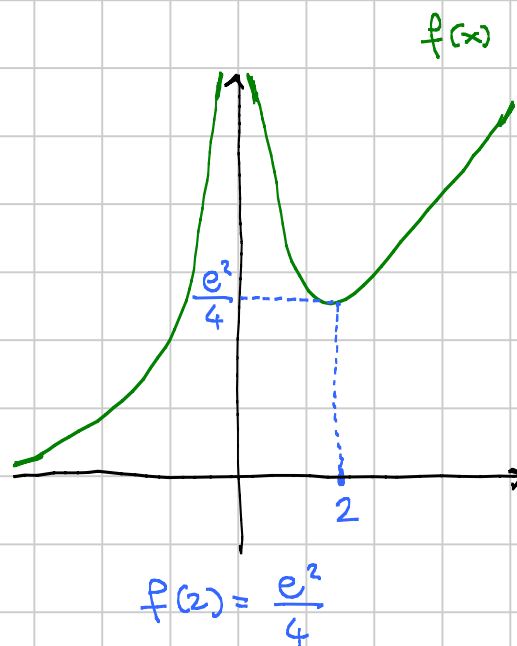
$\rightarrow$ Definita e continua per ogni $x \neq 0$

$\rightarrow$ limiti agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left[\frac{0^+}{+\infty} \right] = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

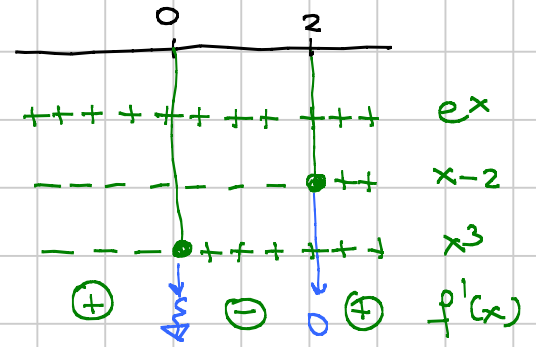


$$f'(x) = \left[\frac{e^x}{x^2} \right]' = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = e^x \frac{x^2 - 2x}{x^4} = e^x \frac{x(x-2)}{x^4} = e^x \frac{x-2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$$



Questo conferma il grafico e dice che l'eq. $e^x = \lambda x^2$ ha

- 0 soluzioni per $\lambda \leq 0$
- 1 soluzione per $\lambda \in (0, \frac{e^2}{4})$
- 2 soluzioni per $\lambda = \frac{e^2}{4}$
- 3 soluzioni per $\lambda > \frac{e^2}{4}$