

Studio globale di funzioni. Tracciare il grafico di una funzione $f(x)$ in tutto l'insieme in cui è definita.

Esempio 1 $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

Simmetrie: f è PARI: $f(x) = f(-x)$

Insieme di definizione e continuità: $f(x)$ è definita per ogni $x \neq \pm 1$, e in tale insieme è continua.

Limiti agli estremi della zona di definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \left[\frac{1}{0^-} \right]$$

(I limiti della 2ª riga seguono da quelli della 1ª perché $f(x)$ è pari)

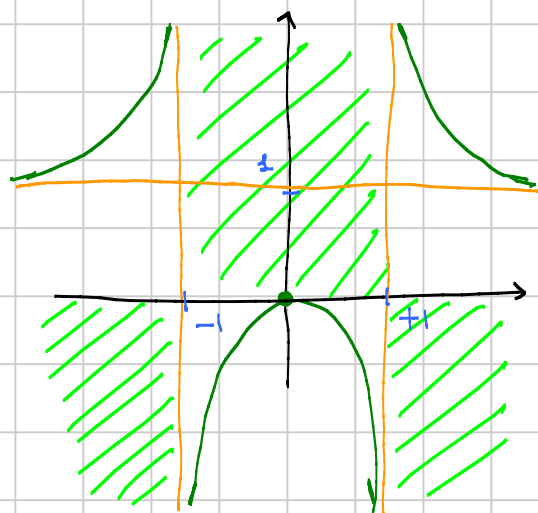
Primo tentativo di grafico

Zeri e segno: risolvere $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

Per ora nessuno può escludere un grafico del tipo

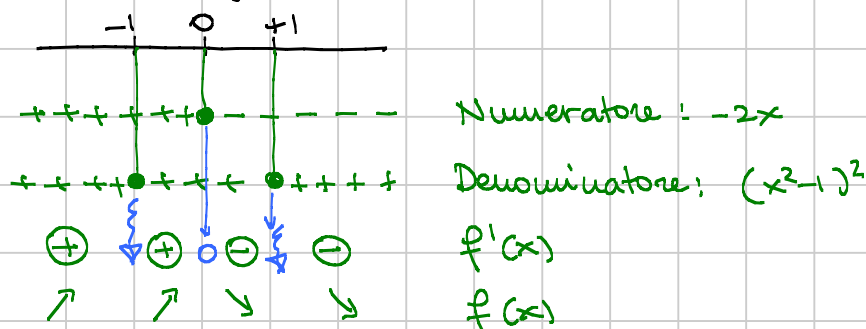


Studio della derivata (dove esiste? che segno ha?)

$f(x)$ è derivabile per ogni $x \neq \pm 1$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x \cdot x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Studio il segno: risolvo $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$



Quindi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Questo conferma la 1ª versione del grafico. Volevo questo diceva che il limite a $\pm\infty$ era $\pm^+$ anche se uno non si era accorto prima del +.

Asintoti $\rightarrow$ orizzontali

$\rightarrow$ verticali

$\rightarrow$ obliqui

Orizzontali Una retta $y = l$ è asintoto orizz. di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. Stesso discorso per $x \rightarrow -\infty$.

Nell'esempio la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale sia per $x \rightarrow +\infty$, sia per $x \rightarrow -\infty$.

Verticali Una retta $x = a$ è asintoto verticale per $f(x)$ se succede una di queste 4 possibilità:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

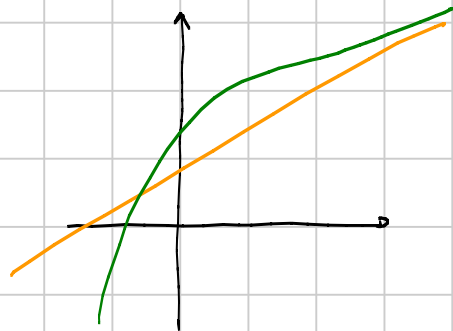
Nell'esempio le rette $x = 1$ e $x = -1$ sono asintoti verticali per $f(x)$

Achtung! Non è obbligatorio che i p.ti in cui ci sono problemi di definizione corrispondano ad asintoti verticali.

Obliqui Una retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(f(x) - mx - n)}_{\substack{\text{distanza tra funzione} \\ \text{e retta}}} = 0$$

Discorso analogo per $x \rightarrow -\infty$,



Oss. Gli asintoti orizzontali sono in realtà asintoti obliqui con $m=0$.

Domanda: come riconoscere la presenza di un asintoto obliquo e calcolarne i coeff. m ed n ?

Si usano queste formule ($+\infty$, ma sono analoghe a $-\infty$)

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

↓ dato dal limite precedente

Oss. Se $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, allora il limite che definisce m è una forma del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, quindi si può provare con l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

Questo funziona solo se il limite di $f'(x)$ esiste.

Dim. Supponiamo che $y = mx + n$ sia asintoto per $x \rightarrow +\infty$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - n + mx + n}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x) - mx - n}{x} + \frac{mx + n}{x} \right] = m$$

↙ $\left[\frac{0}{+\infty} \right] = 0$ ↓ m

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{f(x) - mx - n}_{\downarrow 0} + n \right) = n$$

Ho dim. che, se esiste l'asint. obliquo, m ed n sono dati dalla formula

Viceversa, se esistono e sono reali i numeri m ed n dati dalla formula, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\underbrace{f(x) - mx}_{\substack{|| \\ m}} - n) = 0$$

cioè la retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo.

Esempio $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1}$

Vediamo se c'è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Calcolo

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 - \cancel{x^3} + x}{x^2 - 1} = 3$$

Quindi la retta $y = x + 3$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

La stessa retta è pure asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

Come capire se arriva dall'alto o dal basso: basta studiare

la differenza $f(x) - x - 3$ e

capire se tende a 0^+ oppure a 0^- per $x \rightarrow \pm\infty$ (esercizio!).

