

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 051

Titolo nota

02/11/2011

Esercizio 1 $2^n - n^3 - \sin n$ < 0 definitivamente (vero o falso?)
VERO!

Se dimostro che $a_n \rightarrow -\infty$, ne segue che $a_n < 0$ definitivamente

$$a_n = 2^n - n^3 - \frac{e^n - e^{-n}}{2} = \underbrace{e^n}_{+\infty} \left\{ \underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^n}_0 - \underbrace{\frac{n^3}{e^n}}_0 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{e^{-2n}}{2}}_0 \right\} \rightarrow +\infty \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty$$

Oss. Bastava dimostrare che $a_n \rightarrow l < 0$ per dedurre $a_n \leq 0$ definit.

Esercizio 2 $\arctan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$ < 0 definitivamente
"a_n"

Ora $a_n \rightarrow \arctan 0 - \sin 0 = 0$, quindi non posso dire nulla (per ora) sul segno di a_n .

Brutale: $a_n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sim 0$ Troppo brutale!!

Vado all'ordine 3: $a_n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} \right)$
 $= \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{3n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{6n^3} = -\frac{1}{6n^3} < 0$

Rigoroso: confronto con $\frac{1}{n^3}$ (asintoticamente)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right\} = -\frac{1}{6}$$

Se $\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} \rightarrow -\frac{1}{6}$, allora definitivamente $\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} < 0$, quindi definit.

$a_n < 0$ (il denom. è > 0).

Esercizio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$ termini negativi definitivamente

Porto il segno - fuori: $-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$

Ora basta fare il conf. asintotico con $b_n = \frac{1}{n^3}$ e $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{6} \neq 0 \neq +\infty \dots$

Esercizio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \arctan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right|^{\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{3}$ ($\sim \frac{1}{n^{3\alpha}}$)

Esercizio 5 Consideriamo $f(x) = \log(1 + \sin x^3)$.
Calcolare $f^{(6)}(0)$ e $f^{(2011)}(0)$

Le derivate successive, calcolate in $x=0$, compaiono nel polinomio di Taylor davanti alle opportune potenze di x .
Calcolo il polinomio di grado 6:

$$\sin x^3 = x^3 + o(x^6) \quad (\text{in realtà anche } \sin x^3 = x^3 + o(x^9))$$

Ora

$$\log(1 + \sin x^3) = \log(1 + \underbrace{x^3 + o(x^6)}) = x^3 - \frac{1}{2}x^6 + o((x^3 + o(x^6))^2)$$
$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) = x^3 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$$

D'altra parte

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6)$$

↑
Formula generale per i polinomi di Taylor

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$$

Quindi delle prime 6 derivate quelle non nulle sono la 3^a e la 6^a.

In particolare:

$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 1 \quad (\text{coeff. di } x^3) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 3! = 6$$

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{2} \quad (\text{coeff. di } x^6) \Rightarrow f^{(6)}(0) = -\frac{1}{2}6! = -360$$

Ora basta osservare che nello sviluppo compaiono solo esponenti multipli di 3, quindi $\frac{f^{(2011)}(0)}{2011!} = 0$ (2011 non è multiplo di 3) $\Rightarrow f^{(2011)}(0) = 0$.

Calcoliamo anche il polinomio di grado 3

$$\sin x^3 = x^3 - \frac{1}{6} x^6 + o(x^9), \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} \log(1 + \sin x^3) &= \log\left(1 + x^3 - \frac{1}{6} x^6 + o(x^9)\right) = \underbrace{x^3 - \frac{1}{6} x^6}_t - \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{3} x^9 + o(x^9) \\ &\quad \underbrace{-\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3} \\ &= x^3 - \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{6} x^9 + o(x^9) \end{aligned}$$

Al posto di $o(x^9)$ potrei mettere $o(x^{11})$: il termine successivo sarebbe $+\frac{1}{6} x^{12}$ e verrebbe fuso col doppio prodotto durante il calcolo di $\frac{1}{2} t^2$.
N.B.: un termine con x^{12} viene fuso anche facendo t^4 ...

Esercizio 6 Consideriamo $f(x) = x^7 + \arctan x^3 - \sin x^6$.

È surgettiva? È iniettiva? Cosa possiamo dire di $f(x) = 0$?

SURGETTIVA: sì perché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

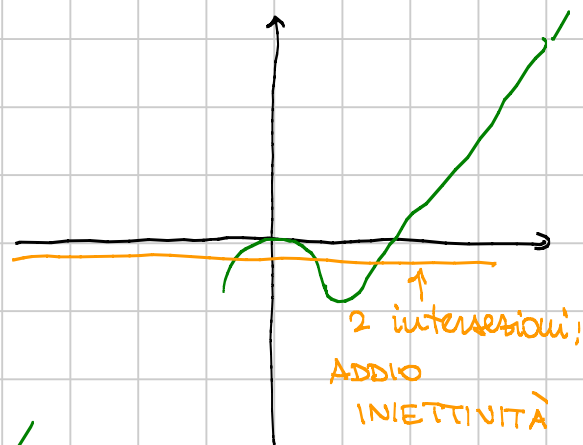
In mezzo è continua (non ci sono problemi burocratici).

Speranza per l'iniettività: calcolo $f'(x)$, spero che $f'(x) > 0$ ($0 \geq 0$ con annullamento sporadico) e poi monotona $\Rightarrow$ iniettiva.

Provo invece lo studio locale in $x=0$:

$f(x) = -x^6 + o(x^6)$ quindi vicino all'origine si comporta come $-x^6$, dunque ha un massimo locale

L'equazione $f(x) = 0$ ha come solus. $x=0$ e ALMENO un'altra soluzione positiva.



Per esercizio calcolare $f^{(6)}(0)$ e $f^{(2011)}(0)$.