

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 050

Titolo nota

02/11/2011

Esercizio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 7n + 2}{n^{\alpha} + 4}$ Per quali valori $\alpha > 0$ converge

Brutale! $a_n \sim \frac{n^2}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 3$.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 + 7n + 2}{n^{\alpha} + 4} \cdot n^{\alpha-2} = \frac{n^{\alpha} + 7 \cdot n^{\alpha-1} + 2 \cdot n^{\alpha-2}}{n^{\alpha} + 4} = \frac{n^{\alpha} \left(1 + \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^{\alpha} \left(1 + \frac{4}{n^{\alpha}}\right)} \rightarrow 1$$

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0, \neq +\infty \Rightarrow \sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$... qui serve $\alpha > 0$

Esercizio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 1)^{\alpha}$ $\alpha > 0$ (termini positivi)

Brutale: $\sqrt[n]{3} - 1 = 3^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log 3} - 1 \sim \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \log 3 \cancel{-1} = \frac{1}{n} \log 3$

$a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$, quindi converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Rigoroso: C.A. con $\frac{1}{n^{\alpha}} = b_n$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \left[\frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\frac{1}{n}} \right]^{\alpha} = \left[\frac{e^{\frac{1}{n} \log 3} - 1}{\frac{1}{n}} \right]^{\alpha} \underset{x = \frac{1}{n}}{=} \left[\frac{e^{x \log 3} - 1}{x} \right]^{\alpha} = [\log 3]^{\alpha} \neq 0, \neq +\infty$$

Esercizio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\cos \frac{1}{n} + 1\right)^{\alpha}$ $\alpha > 0$ termini positivi

Brutale: $1 - \cos \frac{1}{n} \sim 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$
 $\uparrow$
 $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow 0$

Quindi $\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = \frac{1}{(2n^2)^{\alpha}} = \frac{1}{2^{\alpha} n^{2\alpha}}$ converge $\Leftrightarrow 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 + n^3 + 3}{n^6 + n^{\alpha} + 5}$ Termini positivi

Brutale: Numeratore $\sim n^5$. Denominatore $\sim \begin{cases} n^6 & \text{se } \alpha \leq 6 \\ n^{\alpha} & \text{se } \alpha > 6 \end{cases}$

Quindi frazione $\sim \begin{cases} \frac{n^5}{n^6} & \text{se } \alpha \leq 6 \\ \frac{n^5}{n^{\alpha}} & \text{se } \alpha > 6 \end{cases} \quad \frac{1}{n} \text{ quindi diverge}$
 $\frac{1}{n^{\alpha-5}}$ quindi converge $\Leftrightarrow \alpha-5 > 1$
 $\Leftrightarrow \alpha > 6$

Rigoroso: distinguo 2 casi

* se $\alpha \leq 6$ confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$ FARE
 * se $\alpha > 6$ " " " $b_n = \frac{1}{n^{\alpha-5}}$ LIMITI!

Esercizio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 + n^3 + 3}{n^7 + n^{\alpha} + 5}$ Termini positivi

$$\frac{n^5 + n^3 + 3}{n^7 + n^{\alpha} + 5} \leq \frac{n^5 + n^3 + 3}{n^7} \quad \left(\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{converge} \right)$$

Denominatore
più piccolo

Quindi converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

Volevo potero distinguere i 2 casi:

* se $\alpha \leq 7$ Frazione $\sim \frac{n^5}{n^7} = \frac{1}{n^2}$ che converge

* se $\alpha > 7$ Frazione $\sim \frac{n^5}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-5}}$ che converge $\Leftrightarrow \alpha > 6$, cioè sempre in questo caso.

Esercizio 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{n^2 + \alpha^n}$ $\alpha > 0$ termini positivi?

Brutale: $a_n \sim \frac{2^n}{\alpha^n}$ (per lo meno se $\alpha > 1$) $= \left(\frac{2}{\alpha}\right)^n$ che è una geometrica che converge $\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} < 1$, cioè $\Leftrightarrow \alpha > 2$.
 Se invece $\alpha \leq 1$, allora $a_n \sim \frac{2^n}{n^2}$ che diverge (manca la condizione necessaria)

Rigoroso: per $\alpha \leq 1$ manca la condizione necessaria
 per $\alpha > 1$ si può fare il criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \left[\frac{2^n + n^3}{n^2 + 2^n} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{2^n}{2^n} \cdot \frac{1 + \frac{n^3}{2^3}}{1 + \frac{n^2}{2^n}} \right]^{\frac{1}{n}} = \boxed{\frac{2}{2}} \cdot \left[\frac{1 + \frac{n^3}{2^3}}{1 + \frac{n^2}{2^n}} \right]^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{2} \cdot 1^0 = \frac{2}{2}$$

$\downarrow$
 $\frac{2}{2}$

$\downarrow$
 0 vero perché $\alpha > 1$

Questo dice che $\rightarrow$ se $\frac{2}{2} > 1$, cioè $\alpha < 2$ la serie diverge
 $\rightarrow$ se $\frac{2}{2} < 1$, cioè $\alpha > 2$ la serie converge

Resta scoperto $\alpha = 2$, che "va fatto a mano";

$\sum \frac{2^n + n^3}{n^2 + 2^n}$ e questa diverge perché $a_n \rightarrow 1$, quindi manca la condizione necessaria.

Esercizio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^n$ per $\alpha > 0$

Questa in realtà è una serie di potenze con coeff. $a_n = n^{\frac{1}{2}}$, quindi calcolo il raggio di convergenza;

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1. \text{ Quindi}$$

* converge per $|\alpha| < 1$

* non converge per $|\alpha| > 1$

* per $\alpha = \pm 1$ per verifica diretta manca la condizione necessaria, quindi non converge. Quindi converge $\Leftrightarrow |\alpha| < 1$.

Esercizio 8 $\sum_{n=0}^{\infty} n! \alpha^{n^2}$ $\alpha > 0$ È una serie di potenze, ma i coeff. sono 0 ogni volta che l'esponente non è un $\square$ perfetto.

$$a_n = n! \alpha^{n^2}, \text{ Criterio della radice: } \sqrt[n]{a_n} = \boxed{\sqrt[n]{n!}} \cdot \boxed{\alpha^n} = b_n$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ 0 se $\alpha < 1$

Studio b_n usando ancora la radice:

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}} \cdot \alpha = \sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} \cdot \alpha \rightarrow \left[\frac{1}{e} \right]^0 \cdot 1 \cdot \alpha = \alpha. \text{ Se } \alpha < 1, \text{ allora}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{1}{e}$ 1

criterio della rad. per lim. di b_n
 allora

$b_n \rightarrow 0$, quindi $\sum a_n$ converge.

criterio radice per