

C $\Rightarrow$ H. Caso speciale $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ e forma $\frac{0}{0}$.

Dim.: Considero $f(x)$ e $g(x)$. Dalla definizione di limite non servirebbe avere $f(x)$ e $g(x)$ definite anche per $x = x_0$. Poiché la forma indeterminata è del tipo $\frac{0}{0}$, io posso definire $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ottenendo ancora funzioni continue.

Considero l'intervallo $[x_0, x]$ e lì applico Cauchy:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\uparrow$ perché $f(x_0) = g(x_0) = 0$ $\uparrow$ Cauchy



Ad essere precisi ξ dipende da x , quindi sarebbe più corretto scrivere $\xi(x)$. In ogni caso $x_0 < \xi(x) < x$, quindi quando $x \rightarrow x_0^+$ ho che $\xi(x) \rightarrow x_0^+$ per i carabinieri. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{y \rightarrow x_0^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

$\uparrow$ pongo $y = \xi(x)$

che è proprio la tesi dell'Hôpital.

Teorema di Monotonia 2 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Allora

- 1 - Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è strettamente crescente,
- 2 - Se $f'(x) \geq 0$ " " " " " debolmente crescente,
- 3 - Se f è strett. crescente, allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$,
- 4 - " " debolm. " " " $f'(x) \geq 0$ " " " .

NO bbb Questa è falsa: f strett. cresc. $\Rightarrow f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

Esempio $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = x^3$. Si ha che f è strett. crescente, ma $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ e si annulla per $x=0$.

Dim.: ④ Per ipotesi f è debolmente crescente. Prendo $x_0 \in (a, b)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ora denominatore > 0 , numeratore ≥ 0 perché f è debolm. crescente. In ogni caso il rapporto incrementale (cioè la frazione) è ≥ 0 per ogni $h > 0$ (e anche per $h < 0$), quindi il suo limite è ≥ 0 .

Oss. Se f fosse strettamente crescente, allora la frazione sarebbe > 0 per ogni $h > 0$, ma i $>$ diventano $\geq$ quando si passa al limite.

① Ipotesi: $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Tesi: f è strett. crescente.

Prendo due p.ti qualunque c e d

in $[a, b]$ con $c < d$. Applico Lagrange

in $[c, d]$. Ottengo che

$$f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{>0}$$

Quindi $f(d) - f(c) > 0$, cioè $f(d) > f(c)$.

② Stessa cosa: $f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}$

Quindi $f(d) - f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$.

Esempio Dimostrare che l'equazione $2x - \arctan x = 2011$ ha un'unica soluzione reale. Dimostriamo più in generale che $f(x) = x - \arctan x$ è iniettiva e surgettiva.

La surgettività segue dall'essere $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (teo. valori intermedi).
 $f'(x) = 2 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2+1}{1+x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi f è strett. crescente per monotonia 2, dunque iniettiva.

Monotonia 3 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Supponiamo che

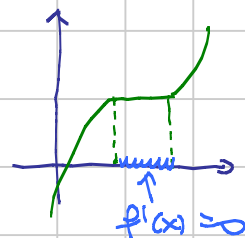
(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$,

(ii) non esiste nessun intervallo contenuto in (a, b) in cui $f'(x)$ è sempre uguale a 0 (ipotesi di annullamento SPORADICO: $f'(x)$ si può annullare, ma non in un intero intervallo).

Allora $f(x)$ è strettamente crescente in $[a, b]$.

Dim. Per l'ipotesi (i) si ha che $f(x)$ è debolmente crescente.

Se non fosse strettamente crescente, ci sarebbe un tratto piatto in un intervallo (c, d) . In tale intervallo avrei $f'(x) = 0$, il che è contro l'ipotesi (ii).



— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x - \sin x$. È surgettiva? È iniettiva?

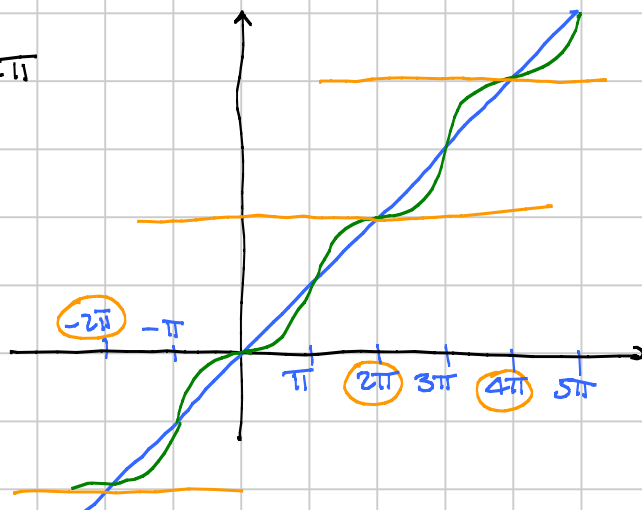
Surgettiva SI: basta fare i limiti a $\pm\infty$ e usare teo. valori intermedi.

Iniettiva: $f'(x) = 1 - \cos x$, quindi $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, cioè $f'(x)$ si annulla sporadicamente.

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ è strettamente crescente $\Rightarrow f$ è iniettiva.

I p.ti stazionari di $f(x)$ sono $x = 2k\pi$
e sono per forza p.ti di flesso a
tangente orizzontale ascendente.

Inoltre $f(x) = x \Leftrightarrow \sin x = 0$
 $\Leftrightarrow x = k\pi$



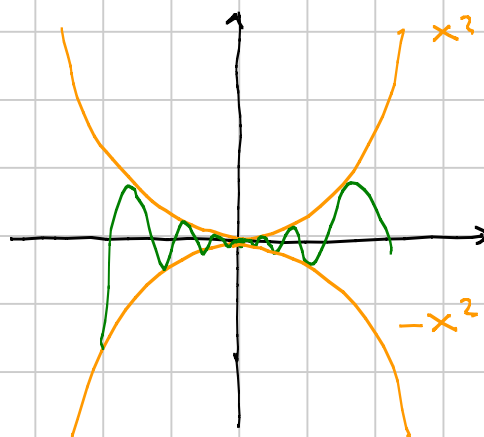
$$f(x) = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prima osservazione: $f(x)$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ (ovvio per $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ va dimostrato facendo il limite del rapp. incrementale).
Con facili conti viene $f'(0) = 0$, quindi $x = 0$ è un pto stazionario.

Seconda osservazione: $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$
e $f(x)$ ha infinite oscillazioni
quando $x \rightarrow 0$.



Osservazione successiva: pongo

$$g(x) = \frac{x}{2} + f(x)$$

Allora si dimostra che $g'(0) = \frac{1}{2}$ e che $g(x)$ non è monotona in nessun intervallo contenente l'origine (perché $g'(x)$ non ha un segno in ogni intervallo contenente l'origine).

Confrontare con monotonia 1...

— 0 — 0 —