

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 048

Titolo nota

29/10/2011

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora per W. max e min esistono.

Dove si trovano i p.ti di max e min? Nelle 3 categorie:

- 1 - p.ti $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$,
- 2 - " " t.c. $f'(x_0)$ non esiste,
- 3 - $x = a$ oppure $x = b$

Dim. Da quovale parte devono stare...

Se stiamo sul bordo sono in categoria 3. Sia x_0 p.to di max.

Se $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0)$ non esiste, allora $x_0 \in$ categoria 2.

Resta il caso $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0)$ esiste. In questo devo dimostrare che $f'(x_0) = 0$. Supponiamo per assurdo che $f'(x_0) > 0$.

Allora per monotonia 1 esisterebbe $\delta > 0$ t.c. $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Ma allora x_0 non sarebbe p.to di max.

Se invece fosse $f'(x_0) < 0$, allora esisterebbe $\delta > 0$ t.c.

$f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, e questo dice che x_0 non sarebbe p.to di max. L'unica possibilità rimasta è che $f'(x_0) = 0$.

La dimostrazione per i p.ti di min. è analoga (farla!).

Oss. Dove ho usato che x_0 è un p.to interno? Nel potermi spostare un po' a dx, un po' a sx a seconda di quello che serve.

Esercizio. Supponiamo che $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e che $f'(x)$ esista per ogni $x \in [a, b]$. Supponiamo che a sia p.to di max. Cosa possiamo dire di $f'(a)$? $(f'(a) \leq 0)$
E se a è p.to di min? $(f'(a) \geq 0)$
Stessa cosa scambiando b con a .

— o — o —

Teorema di ROLLE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

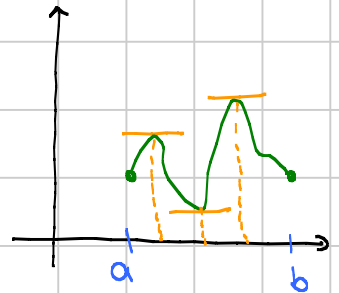
(i) f è continua in $[a, b]$ (chiuso)

(ii) f è derivabile in (a, b) (se è derivabile in $[a, b]$, meglio!)

(iii) $f(a) = f(b)$.

Allora $\exists \xi \in (a, b)$ t.c. $f'(\xi) = 0$.

Geometricamente è quasi ovvio. Gli ξ richiesti sono i pti a tangenza orizzontale e non sono necessariamente unici.



Dim. Gli ξ richiesti sono i pti di max e min purché rientrino tra gli stazionari interni. D'altra parte

- i pti di max e min non possono essere singolari interni per via dell'ipotesi (ii),
- se i pti di max e min fossero entrambi sul bordo, per l'ipotesi (iii) la funzione sarebbe costante, quindi avrebbe un qualunque $\xi \in (a, b)$

Teorema di CAUCHY Siano $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f e g continue in $[a, b]$,

(ii) f e g derivabili in (a, b) .

Allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

1° tesi

Supponiamo inoltre che

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2° tesi

Oss. Prendo $[a, b] = [-1, 1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. Allora
 $f(b) - f(a) = 1 - 1 = 0$, $g(b) - g(a) = 2$. Quindi

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0. \text{ Tuttavia non esiste nessun p.to } \xi \in (-1, 1) \text{ che verifica } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = 0. \text{ Infatti dovrebbe essere } f'(\xi) = 0, \text{ ma } f'(\xi) = 2\xi \text{ quindi } \xi = 0 \text{ ma allora anche } g'(\xi) = 3\xi^2 = 0 \text{ e viene } \frac{0}{0}.$$

Quindi in questo esempio il secondo modo di scrivere la tesi non va bene (infatti non è verificata l'ipotesi (iii)).

Il primo modo di scrivere la tesi invece va bene (viene $0 = 0$).

Dim. Pongo $\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$

Quali sono le proprietà di $\varphi(x)$?

(i) φ è continua in $[a, b]$ (combinazione lineare di funz. continue)

(ii) φ è derivabile in (a, b) (" " " ")

(iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$, cioè

$$(f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) \\ f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b)$$

Grazie a (i), (ii), (iii) posso applicare ROLLE a $\varphi(x)$. Otengo che esiste $\xi \in (a, b)$ t.c. $\varphi'(\xi) = 0$. Ma

$$\varphi'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$$

che è equivalente alla prima tesi.

Supponiamo ora che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora abbiamo che $g(b) \neq g(a)$. Se infatti fosse $g(b) = g(a)$ potrei applicare Rolle alla funzione $g(x)$ e avrei l'esistenza di un p.to $c \in (a, b)$ t.c. $g'(c) = 0$ che invece abbiamo supposto non esistere.

A questo p.to posso dividere e trasformare la 1ª tesi nella 2ª tesi.

— 0 — 0 —

Teorema di Lagrange Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

- (i) f continua in $[a, b]$,
- (ii) f derivabile in (a, b) .

Allora $\exists \xi \in (a, b)$ t.c. $f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi)$.

Dim.: Uso Cauchy con $g(x) = x$. In questo modo sono verificate le ipotesi (i), (ii), (iii) di Cauchy ($g'(x) \equiv 1$). Allora per la 2ª tesi di Cauchy abbiamo che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ cioè } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1}$$

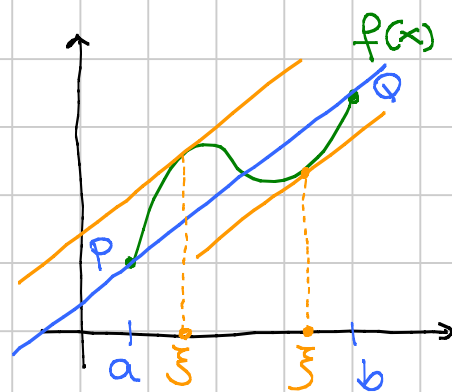
che è equivalente alla tesi di Lagrange.
— o — o —

Significato geometrico Scriviamo la tesi come

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \boxed{f'(\xi)}$$

↓
coeff. angolare
retta PQ

↓
coeff. angolare retta
tangente al grafico
nel pto con. a ξ



Lagrange: $\exists \xi \in (a, b)$ in cui la retta tangente è parallela alla retta PQ.

Brutalmente: Lagrange è la versione inclinata di Rolle.
— o — o —