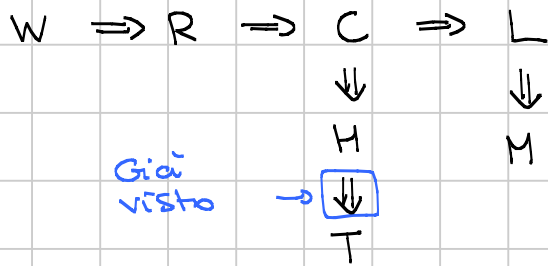


ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 047

Titolo nota

29/10/2011



WEIERSTRASS

ROLLE

CAUCHY

LAGRANGE

HÔPITAL

TAYLOR

MONOTONIA

Terminologia Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che $M = \max \{ f(x) : x \in A \}$ se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = M$,

$m = \min \{ f(x) : x \in A \}$ se

(i) $f(x) \geq m$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = m$

Oss. M ed m non sono obbligati ad esistere, ma se esistono sono unici.

Supposto che M esista, allora esiste $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = M$ e questo x_0 non è obbligato ad essere unico. Tutti gli x_0 t.c. $f(x_0) = M$ si chiamano p.ti di massimo.

Achtung! Mai confondere il massimo M (che è una "y") con i p.ti di max (che sono delle "x").

Esempio 1 $f(x) = \arctan x$
 $A = [0, +\infty)$

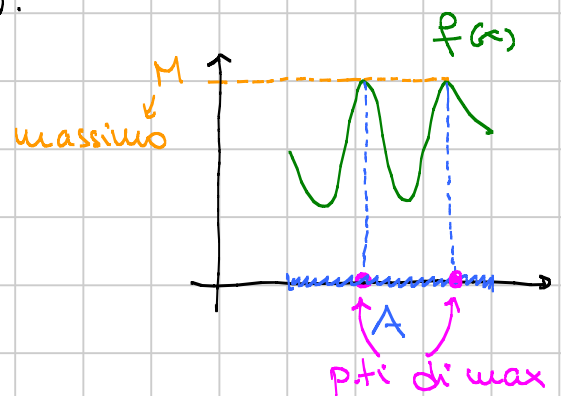
$\max \{ \arctan x : x \in A \}$ N.E.

$\sup \{ \quad \quad \quad \} = \frac{\pi}{2}$

$\min \{ \quad \quad \quad \} = 0$

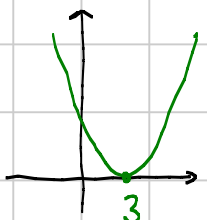
$\inf \{ \quad \quad \quad \} = 0$

p.to di minimo : $x = 0$.



Esempio 2 $\min \{ (x-3)^2 : x \in [0, +\infty) \} = 0$

P.to di minimo : $x = 3$.



Teorema di WEIERSTRASS Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
intervallo limitato estremi compresi

Allora max e min esistono per forza.

Oss. È importante l'ipotesi che gli estremi siano compresi.

Se ad esempio $A = (0, 1)$, $f(x) = x^2$, allora max e min non esistono, $\inf = 0$, $\sup = 1$.

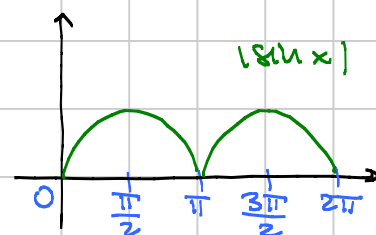
Achtung! Se le ipotesi non sono verificate, max e min possono esistere comunque. Ad esempio: $A = (0, 2\pi)$, $f(x) = |\sin x|$

$$\text{Max } \{ |\sin x| : 0 < x < 2\pi \} = 1$$

$$\text{P.ti di max: } x = \frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{min } \{ |\sin x| : 0 < x < 2\pi \} = 0$$

$$\text{P.to di min: } x = \pi.$$



Ricerca operativa di max e min Supponiamo che max e min esistano (ad esempio per Weierstrass). Per trovarli basta determinare i p.ti di max e di min. Questi si trovano in 3 categorie

- 1 - P.ti stazionari interni: p.ti interni ad A in cui $f'(x) = 0$
- 2 - P.ti singolari interni: p.ti " " " in cui $f'(x)$ non esiste
- 3 - Bordo: p.ti del bordo di A (se A è intervallo sono gli estremi).

Operativamente:

- * si dimostra che max e min esistono (ad esempio con W.)
- * si trovano i p.ti delle 3 categorie (candidati p.ti di max/min)
- * si sostituiscono nella funzione: dove vale di più è il max, dove vale di meno è il min.

Esempio $f(x) = |\sin x|$ $A = [0, 2\pi]$.

$$\text{Max} = 1 \quad \text{p.ti di max: } x = \frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{3\pi}{2} \text{ di categoria 1}$$

$$\text{min} = 0 \quad \text{p.ti di min: } x = 0 \text{ e } x = 2\pi \text{ (categoria bordo)}$$

$$x = \pi \text{ (singolare interno: verificare!!)}$$

Variante di Weierstrass Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e periodica.

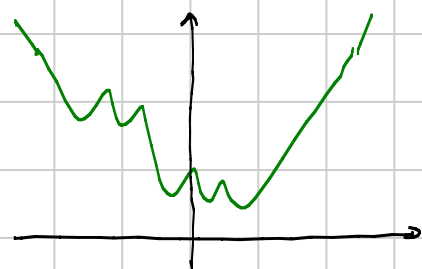
Allora $\max$ e $\min$ esistono per forza.

Dim.: sia $T > 0$ un periodo di $f(x)$. Considero $[0, T]$. Qui posso applicare W., ottenendo max e min in $[0, T]$. Basta ora osservare che max e min in $[0, T]$ lo sono pure su tutto $\mathbb{R}$. Osservazione: in ogni periodo ci saranno nuovi p.ti di max e di min (traslati dei precedenti).

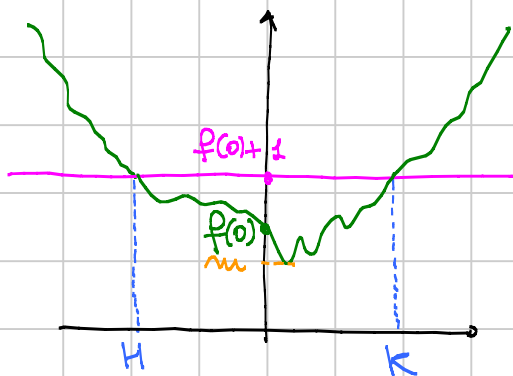
Variante 2 di Weierstrass Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.



Dim.: Considero $f(c)$. Considero $f(c)+1$ e lo uso nella definizione di limite. Poiché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ avremo che $\exists k > 0$ t.c. $f(x) \geq f(c)+1$ per ogni $x \geq k$.



Allo stesso modo poiché $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$ almeno che $\exists H < 0$ t.c. $f(x) \geq f(0) + 1$ per ogni $x \leq H$.

Considero ora $[H, k]$ dove posso applicare W. classico. Sia

$$m = \min \{ f(x) : x \in [H, k] \}$$

Dico che m è anche minimo su $\mathbb{R}$. Devo verificare che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ci sono 3 casi:

* Se $x \in [H, k]$, allora $f(x) \geq m$ perchè m è min in $[H, k]$

* se $x > k$, allora $f(x) \geq f(0) + 1 \geq f(0) \geq m$
 per la scelta banale perché $0 \in [H, k]$ e qui tutti i valori sono $\geq m$.

* se $x < H$, è sostanzialmente come il caso precedente.

Oss. I p.ti di minimo sono tutti e soli i p.ti di minimo in $[H, k]$.

Variante della variante Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Allora esiste $\max \{ f(x) : x > 0 \}$. [Dimostrare per esercizio].

Esercizio (Semi-hard) Supponiamo che $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (quindi manca un estremo solo) sia continua.

Possiamo dire qualcosa sull'esistenza di max e/o min. ?

— o — o —