

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

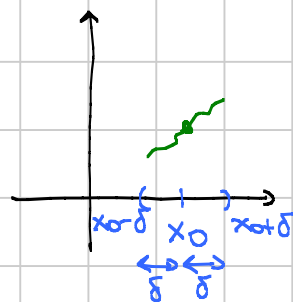
Obiettivo: capire come è fatto il grafico di una funzione vicino ad un p.to dato (in un suo intorno)

Monotonia 1 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0 \in A$.

Supponiamo che $f'(x_0) > 0$ (esiste ed è positiva).

Allora esiste $\delta > 0$ b.c.

- $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$
- $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0)$



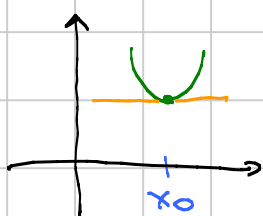
Achtung! NON ho detto che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x)$ è monotona in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Oss. Se avessi supposto $f'(x_0) < 0$, allora la conclusione era

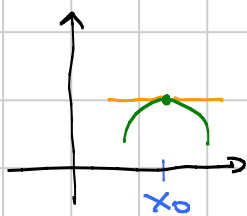
- $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
- $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Cosa succede se $f'(x_0) = 0$ (i p.ti in cui succede si chiamano p.ti stazionari)

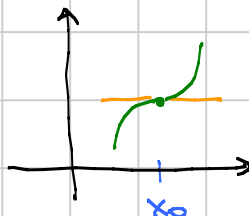
In questo caso ci sono 5 comportamenti possibili;



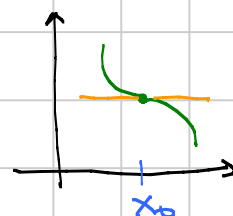
①



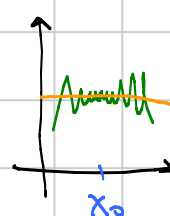
②



③



④



⑤

↑
Patologia...

① Minimo locale

② Massimo locale

③ Flesso a tangente orizzontale ascendente

④ " " " " discendente

Come riconoscere il tipo di situazione locale?

Criterio delle derivate successive

Cerco la prima derivata che non si annulla in x_0 . Sia questa di ordine k , cioè

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Allora

- k pari e $f^{(k)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ minimo locale
- k pari e $f^{(k)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ massimo locale
- k dispari e $f^{(k)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ flesso a tang. orizz. ascendente
- k dispari e $f^{(k)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ " " " " discendente

Oss. Il caso ⑤ si può verificare solo se tutte le derivate in x_0 sono nulle, oppure qualche derivata non esiste. Ovviamente in questi casi non si è per forza nella situazione ⑤.

Dim. monotonia 1 Ipotesi $f'(x_0) > 0$, cioè

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$$

Per permanenza del segno si ha che esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione, cioè il rapporto incrementale, è > 0 per ogni $h \in (-\delta, \delta)$.

- Se $h > 0$ il numeratore deve essere > 0 , cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$ per ogni $h \in (0, \delta)$
p.to qualunque in $(x_0, x_0+\delta)$
- Se $h < 0$ il numeratore deve essere < 0 , cioè $f(x_0+h) < f(x_0)$ per ogni $h \in (-\delta, 0)$
p.to qualunque in $(x_0-\delta, x_0)$

— o — o —

Dim. criterio derivate successive Taylor!

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k)$$

Per ipotesi se ne vanno tutti i termini da h fino a h^{k-1} . Quindi resta:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^k)$$

Allora
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{o(h^k)}{h^k}$$

Facendo il limite ottengo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Ora ragioniamo come in monotonia 1

Caso 1: k pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ Esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione è > 0 per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

- Per $h > 0$ il denom. è > 0 , quindi numeratore > 0 , cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$ per ogni $h \in (0, \delta)$ [un po' dopo x_0 , $f(x)$ vale di +]
- per $h < 0$ il denom. è > 0 (perché k è pari), quindi come prima $f(x_0+h) > f(x_0)$ per ogni $h \in (-\delta, 0)$ [un po' prima di x_0 , $f(x)$ vale di +]

Caso 2: k dispari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ Esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione è < 0 per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$.

- Per $h > 0$ il denom. è > 0 , quindi numeratore < 0 , cioè $f(x_0+h) < f(x_0)$... [un po' dopo vale -]
- Per $h < 0$ il denom. è < 0 (k è dispari), quindi numeratore > 0 , cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$... [un po' prima vale +]

Esercizio: fare i 2 casi rimanenti

Criterio ri-enunciato Nell' intorno di un pto stazionario una funzione $f(x)$ si comporta come il primo termine non nullo (e non costante) del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

$$x^{22} + \arctan x^{44} - 7x^3 - \sin x^2 = 0$$

ha almeno 3 soluzioni reali.

Sia $f(x)$ la funzione in questione. Intanto $f(0) = 0$, il che ci dà subito una soluzione. Si vede subito che

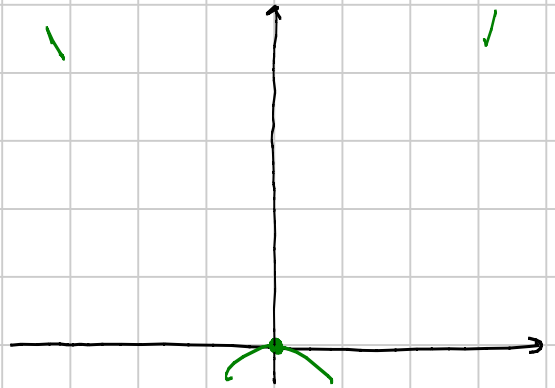
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Studio locale nell'intorno di $x=0$

$$f(x) = -x^2 + o(x^2)$$

↑
proviene
da $\sin x^2$

↑
si mangia tutto
il resto



Quindi $f(x)$ si comporta vicino a $x=0$ come $-x^2$ (nota bene: $f'(x_0) = 0$ perché non c'è x nel polinomio di Taylor), quindi $f(x)$ ha un max locale in $x=0$, quindi $f(x) < 0$ in un intorno di $x=0$ (destra e sinistra).

Questo ci produce gratis una soluzione di $f(x) = 0$ con $x > 0$ ed una soluzione con $x < 0$.