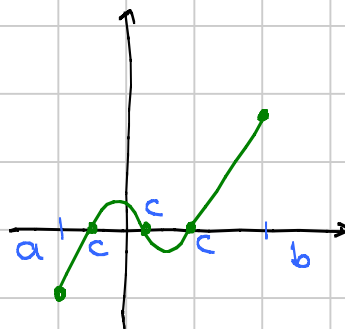


TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Supponiamo che  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (cioè  $f(x)$  assume valori di segno diverso ai 2 estremi). Allora  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$ .

Interpretazione grafica

C'è almeno un punto (non necessariamente unico) in cui  $f(x) = 0$ .



Prima variante Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, e sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Supponiamo che  $f(a) < \lambda$  e  $f(b) > \lambda$  (o viceversa). Allora  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = \lambda$ .

Dim. variante: considero  $g(x) = f(x) - \lambda$ . Si verifica che  $g(a) = f(a) - \lambda < 0$  e  $g(b) = f(b) - \lambda > 0$ . Quindi  $g(a) < 0$  e  $g(b) > 0$  e  $g$  è continua. Quindi esiste  $c \in (a, b)$  t.c.  $g(c) = 0$ , cioè  $f(c) - \lambda = 0$ , cioè  $f(c) = \lambda$ .

Seconda variante Sia  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Siano  $L = \sup \{f(x) : x \in (a, b)\}$  e  $l = \inf \{f(x) : x \in (a, b)\}$  (nota:  $L$  ed  $l$  sono delle quote, eventualmente anche  $\pm \infty$ ).

Sia  $\lambda$  tale che  $l < \lambda < L$ .

Allora  $\exists c \in (a, b)$  t.c.  $f(c) = \lambda$ .

Detto in altri termini: una funzione in un intervallo  $(a, b)$  assume tutti i valori intermedi tra il suo inf e il suo sup.

I valori  $l$  ed  $L$  possono essere assunti o no a seconda dei casi.

Oss. La 2ª variante si chiama TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

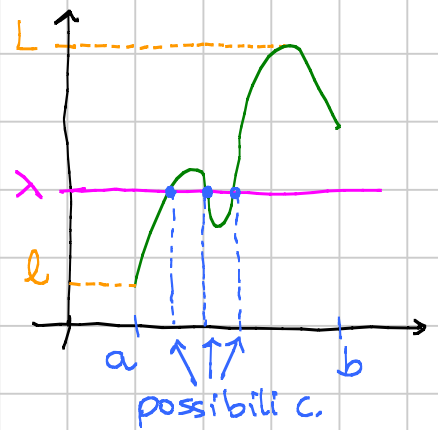
## Interpretazione grafica.

Dim. 2ª variante:

- Poiché  $l < \lambda$  ed  $l$  è l'inf., esiste un p.to  $A \in (a, b)$  t.c.  $f(A) < \lambda$
- Poiché  $\lambda < L$  ed  $L$  è il sup. esiste un p.to  $B \in (a, b)$  t.c.  $f(B) > \lambda$

Non so chi è + grande tra  $A$  e  $B$ , ma comunque posso applicare la 1ª variante nell'intervallo di estremi  $A$  e  $B$ .

— o — o —



Dim. teo. esistenza degli zeri

Supponiamo  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$

(nel caso contrario la dimostrazione è la stessa, oppure cambio  $f(x)$  con  $-f(x)$ ).

Pongo

$$c = \inf \{ x \in (a, b) : f(x) > 0 \}$$

Dico che  $f(c) = 0$ . Supponiamo che per assurdo non sia così.

Allora ci sono due possibilità.

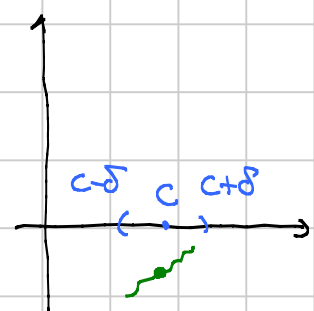
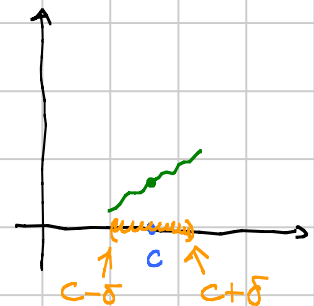
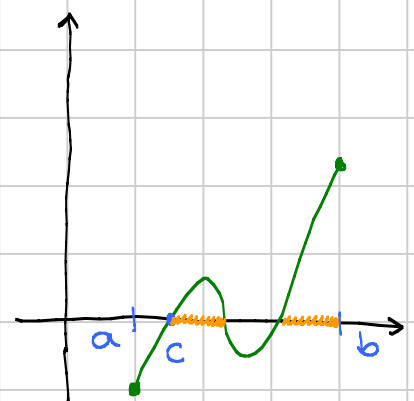
$\boxed{f(c) > 0}$  Allora per continuità  $f(x) > 0$  in un intorno del tipo  $(c-\delta, c+\delta)$  per un opportuno  $\delta > 0$ , ma allora  $c$  non sarebbe l'inf., perché l'inf. sarebbe più basso.

$\boxed{f(c) < 0}$  Per continuità sarebbe  $f(x) < 0$  in  $(c-\delta, c+\delta)$  per un  $\delta > 0$  opportuno.

Ma allora  $c$  non sarebbe l'inf., perché l'inf. sarebbe più grande.

(Nota bene: per la caratterizzazione dell'inf, in ogni intorno destro di  $c$  dovrai trovare dei p.ti  $x$  t.c.  $f(x) > 0$ ).

— o — o —

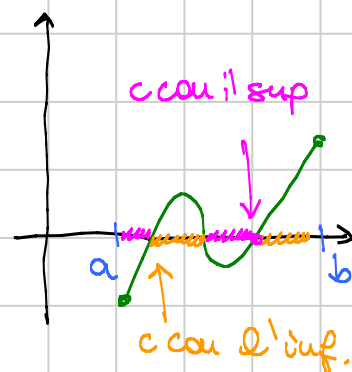


Oss. Avrei potuto fare la stessa dimostrazione ponendo

$$c = \sup \{ x \in (a, b) : f(x) \leq 0 \}$$

Avrei ottenuto lo stesso  $c$ ? Dipende: se il  $c$  è unico certamente sì, ma in generale no.

Domanda: è vero che con l'inf trovo il più piccolo  $c$  possibile, e con il sup trovo il più grande  $c$  possibile?



Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

$$x^2 = \sin x + 8$$

ha almeno una soluzione reale.

Pongo  $f(x) = x^2 - \sin x - 8$ . Cerco un intervallo  $[a, b]$  tale che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$  (pà uso che  $f(x)$  è continua).

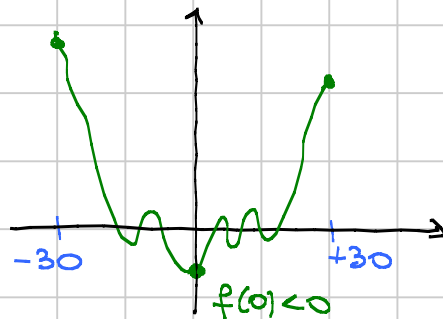
Basta prendere  $a = 0 : f(0) = -8 < 0$

$$b = 30 : f(30) = 900 - \sin 30 - 8 \geq 900 - 9 > 0$$

Quindi di sicuro esiste  $c \in (0, 30)$  t.c.  $f(c) = 0$ . Questo  $c$  risolve l'equazione iniziale.

Si può dire di più: guardiamo l'intervallo  $[-30, 0]$ . Si ha che  $f(-30) = 900 - \sin(-30) - 8 > 0$  mentre  $f(0) = -8 < 0$ .

Quindi esiste una soluzione anche in  $(-30, 0)$ .



Esempio 2 Domanda: la funzione  $f(x) = x^7 + \log(1 + x^{20})$  è surgettiva? Si intende vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Caratterizzazione della surgettività:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è surgettiva se e solo se per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'equazione

$$f(x) = \lambda$$

ha almeno una soluzione reale.

Grazie alla 1ª variante basta trovare un intervallo  $[a, b]$  tale che  $f(a) < \lambda$  e  $f(b) > \lambda$ .

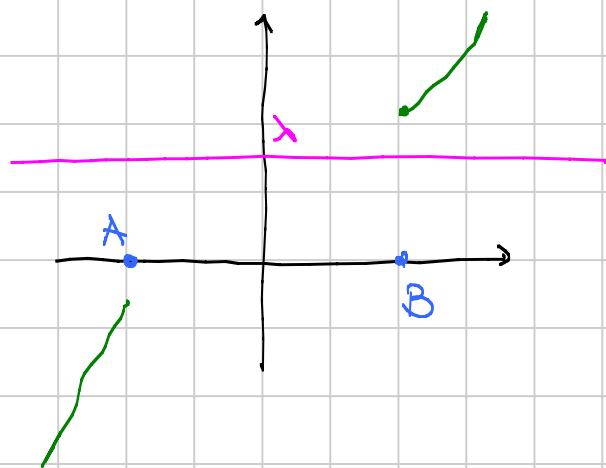
Osservazione fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Per definizione di limite ho che

- esiste  $A < 0$  t.c.  $f(A) < \lambda$   
(è infatti vero "definitivamente" a sinistra)
- esiste  $B > 0$  t.c.  $f(B) > \lambda$   
(questo è vero "definitivamente" a destra).



Basta applicare la 1ª variante in  $[A, B]$ .

Fatto generale Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Supponiamo che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (o viceversa)

Allora  $f$  è surgettiva.

— o — o —