

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 044

Titolo nota

27/10/2011

Calcolo raggio di convergenza. Supponiamo che $\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow L$. Allora

- se $|x| < \frac{1}{L}$ la serie converge assolutamente
- se $|x| > \frac{1}{L}$ la serie non verifica la condizione necessaria.

Dim.: Facciamo il caso in cui $L \in (0, +\infty)$ (gli altri 2 casi sono più semplici e si fanno sostanzialmente allo stesso modo: esercizio!).

Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{c_n x^n} \quad a_n$$

Provo a studiarla con l'assoluta convergenza, cioè studio

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n$$

Questa la studio con il criterio della radice. Considero

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| \rightarrow L \cdot |x|$$

Caso 1 Se $L \cdot |x| < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{L}$, si ha che $\sum |a_n|$ converge per il criterio della radice, cioè $\sum a_n$ converge assolutamente.

Caso 2 Se $L \cdot |x| > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, si ha che $\sum |a_n| = +\infty$ per il criterio della radice, quindi boh (falsa partenza!).
Tuttavia: se $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow L \cdot |x| > 1$, cioè $|x| > \frac{1}{L}$, allora per il criterio della radice applicato ai limiti si ha che $|a_n| \rightarrow +\infty$, quindi non è possibile che $a_n \rightarrow 0$ (perché altrimenti anche $|a_n| \rightarrow 0$). Ne segue che $\sum a_n$ non verifica la condizione necessaria, dunque non può convergere.

— o — o —

SERIE DI TAYLOR Sia $f(x)$ una funzione derivabile infinite volte in un intorno dell'origine. Si definisce serie di Taylor la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Si tratta della serie di potenze le cui somme parziali (ottenute fermandosi ad un certo valore di n) sono i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Esempi

$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$ è la serie di Taylor della funzione e^x .

Teorema 3 Per tutte le funzioni ragionevoli (cioè per tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante ... al di fuori dei problemi burocratici) si ha che la serie di Taylor DOVE CONVERGE, cioè per i valori di x per cui converge, ha come somma la funzione stessa, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in \text{ZONA CONVERGENZA.}$$

Brutalmente: la funzione è uguale alla somma della serie.

Esempio 1 Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. È ovvio che la serie converge (per criterio rapporto o criterio radice).

La interpreto come caso $x=2$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

che è la serie di Taylor di $f(x) = e^x$. Quindi, dove converge, si ha che la somma è e^x . Quindi nel vostro caso la somma è e^2 , purché $x=2$ sia nella zona di convergenza. Quindi calcolo R :

poiché $c_n = \frac{1}{n!}$ abbiamo che $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 = L$

Quindi $R = \frac{1}{0} = +\infty$, dunque la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Conclusione: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$.
— 0 — 0 —

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Serie di potenze con $c_n = \frac{1}{n}$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

- Per $x \in (-1, 1)$ la serie converge (anche assolutamente)
- Per $|x| > 1$ la serie non converge (manca condiz. necessaria)
- Per $x = 1$ ottengo $\sum \frac{1}{n}$ che diverge a $+\infty$
- Per $x = -1$ ottengo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ che converge per Leibnitz

Conclusione per la convergenza, la serie data converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1)$.

A cosa converge? Dobbiamo trovare una $f(x)$ la cui serie di Taylor sia quella data

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (\text{cambiano i segni sui dispari})$$

$$\text{Quindi} \quad -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\text{e pertanto} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

$$\forall x \in [-1, 1)$$

ZONA DI CONVERGENZA
CALCOLATA PRIMA

In particolare, per $x = -1$ ottengo

$$-\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

Esempio 3 Calcolare $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

Più formalmente: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

Perché converge? Per Leibnitz (non per assoluta convergenza perché diventerebbe $\sum \frac{1}{2n+1} = +\infty$).

La serie data è il caso $x=1$ della serie di potenze $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$, cioè la serie di Taylor di $\arctan x$. Quindi

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \forall x \in \text{zona di convergenza}$$

Se $x \in \text{zona di convergenza}$, allora la somma fa $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Qual è il raggio di convergenza?

Si potrebbe provare con $\sqrt[n]{|a_n|}$, ma (achtung!) $C_n = 0$ per n pari e $C_n = \pm \frac{1}{n}$ per n dispari, quindi il limite richiesto non esiste...

Tuttavia per il teorema 1 sappiamo che esiste R t.c.

Dove sta $x=1$?

• Se stesse in zona rossa, la serie non convergerebbe

• " " " " verde, " " convergerebbe assolutamente.

L'unica possibilità è che sia $R=1$. Per sostituzione di $x = \pm 1$ si vede che la serie di Taylor di $\arctan x$ converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1]$.

Posso quindi concludere che

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

— 0 — 0 —