

# ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 043

Titolo nota

27/10/2011

Assoluta convergenza  $\sum |a_n|$  converge  $\Rightarrow \sum a_n$  converge

(Terminologia: una serie si dice convergente se converge, si dice assolutamente convergente se  $\sum |a_n|$  converge)

Esempi  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  è convergente (per Leibnitz), ma non assolutamente convergente

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$  è assolutamente convergente, quindi anche convergente.

Dim.:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - |a_n| + |a_n|) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| - a_n)$

Basta dimostrare che le ultime 2 serie convergono. La 1ª converge per ipotesi. Per la 2ª osservo che

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per dimostrare queste 2 uguaglianze basta considerare il caso  $a_n \geq 0$  (in cui viene  $0 \leq 0 \leq 2|a_n|$ ) e il caso  $a_n < 0$  (in cui viene  $0 \leq -2a_n \leq -2a_n$ ).

Ora applico il criterio del confronto:  $\sum 2|a_n|$  converge per ipotesi, dunque  $\sum (|a_n| - a_n)$ , che è a termini  $\geq 0$ , converge pure lei.

— 0 — 0 —

Leibnitz  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  (i)  $a_n \geq 0$  definita.

(ii)  $a_{n+1} \leq a_n$  "

(iii)  $a_n \rightarrow 0$

Allora la serie converge.

Dim.: Devo dimostrare che la successione delle somme parziali ha limite.

Intanto assumo che (i) e (ii) siano vere per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (altrimenti ti cambio un numero finito di termini). Ora

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 - a_1, \quad s_2 = a_0 - a_1 + a_2, \quad s_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \dots$$

Dico che  $s_{2n+2} \leq s_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$s_{2n+3} \geq s_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Infatti: 
$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} - \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+2} \\ &= s_{2n} - (\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+2}) \leq s_{2n} \\ &\quad \geq 0 \text{ per (ii)} \end{aligned}$$

e stessa cosa sui dispari

Inoltre dico che  $s_{2n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (Esercizio: dimostrarlo per bene)

$s_{2n+1} \leq d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . per involuzione)

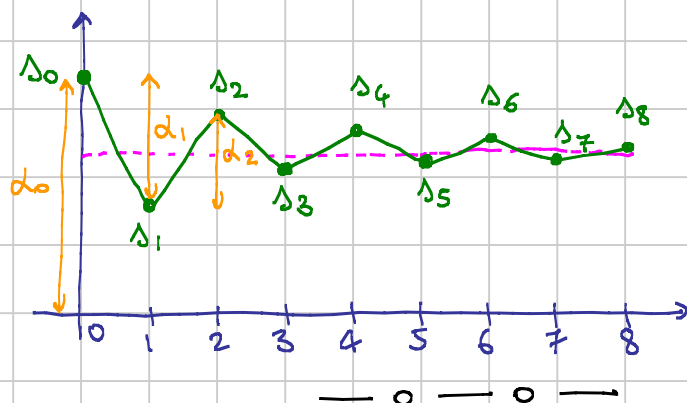
Allora per il teorema sulle successioni monotone otteniamo che

$s_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$  e  $s_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$ . Vorrei concludere che  $m = l$ .

Ma

$$\begin{array}{ccc} s_{2n+1} - s_{2n} & = & -\alpha_{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & - & l = 0 \end{array} \quad \leftarrow \text{per ipotesi (iii)}$$

Graficamente, se rappresento la  $s_n$ , ottengo un disegno del tipo



i pari scendono  
i dispari salgono  
la differenza tende a 0

## SERIE DI POTENZE

Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

dove  $c_n$  sono numeri dati, chiamati coefficienti, e  $x$  è un parametro reale.

Bruttalmente: è un polinomio di grado infinito, cioè la somma di infinite potenze della  $x$ .

DOMANDE: ① Per quali valori di  $x$  la serie converge?

② Quando converge, quanto vale la somma?

Esempio Nel caso in cui  $a_n = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , otteniamo  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , cioè la serie geometrica di ragione  $x$ . Quindi

① converge  $\Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

② quando converge, la somma è  $\frac{1}{1-x}$

Oss. Relativamente alla domanda ①, la serie converge sempre almeno per  $x=0$ , e la somma è  $c_0$ .

Teorema 1 (Raggio di convergenza). Esiste  $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$  tale che

(i) per ogni  $x \in (-R, R)$ , cioè quando  $|x| < R$ , la serie converge assolutamente, quindi in particolare converge;

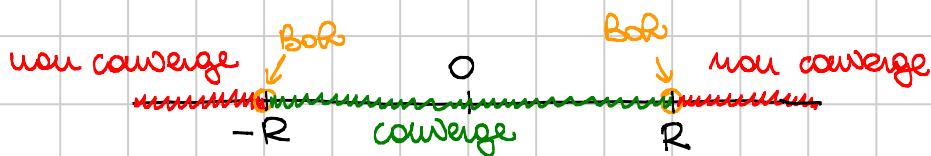
(ii) per ogni  $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ , cioè quando  $|x| > R$ , la serie non verifica la condizione necessaria, quindi non converge;

(iii) per  $x = \pm R$ , cioè quando  $|x| = R$ , dipende dai casi (il comportamento può anche essere diverso in  $+R$  e  $-R$ ).

Oss. ① Se  $R = +\infty$ , allora siamo sempre nel caso (i) e la serie converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

② Se  $R = 0$ , allora la serie non converge per ogni  $x \neq 0$ , mentre per  $x=0$  già sappiamo che converge a  $c_0$

③ Se  $R \in (0, +\infty)$ , allora abbiamo questa situazione



Questo giustifica porre  $R =$  raggio di convergenza.

Teorema 2 (Calcolo di  $R$ ). Consideriamo una serie di potenze.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

Allora  $R = \frac{1}{L}$  (interpretato anche per  $L=0$  e  $L=+\infty$ ).

Oss. Il teorema non si applica quando  $\sqrt[n]{|c_n|}$  non ha limite.

Esempio 1  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ . È una serie di potenze con  $c_n = \frac{1}{n^2}$

$$\text{Allora } \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{n^2} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie converge per  $|x| < 1$  e non converge per  $|x| > 1$ .

Controllo "a mano"  $x=1$  e  $x=-1$

Per  $x=1$  ottengo  $\sum \frac{1}{n^2}$ , che converge

Per  $x=-1$  "  $\sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$ , che converge, anche assolutamente.

Conclusione  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  converge  $(\Leftrightarrow) x \in [-1, 1]$

Esempio 2  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! + n^3}$ . Serie di potenze con  $c_n = \frac{1}{n! + n^3}$

$$\text{Allora } \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n! + n^3}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n! + n^3}} = 0 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = +\infty$$

Conclusione: la serie converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .