

SERIE CON TERMINI A SEGNO VARIABILEDue criteri $\rightarrow$ LEIBNITZ $\rightarrow$ ASSOLUTA CONVERGENZACriterio di Leibnitz (serie a segno alternato)

Consideriamo una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{(-1)^n \alpha_n} = a_n$$

Supponiamo 3 ipotesi:

(i) $\alpha_n \geq 0$ definitivamente (questo è come dire che a_n è a segno alternato)(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ definitivamente (cioè α_n è debolmente decrescente)(iii) $\alpha_n \rightarrow 0$ (legato alla condizione necessaria).

Allora la serie converge.

Oss. Se qualcuna delle ipotesi fallisce, allora boh (rimangono aperte tutte e 4 le possibilità).Oss. Si ha che $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha_n \rightarrow 0$ (convincersene!!).

Quindi se fallisce l'ipotesi (iii), allora fallisce la condizione necessaria, quindi la serie non converge (e restano 3 possibilità).

Criterio assoluta convergenza $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.Utilizzo operativo assoluta convergenza. Devo studiare $\sum a_n$.① Provo a studiare $\sum |a_n|$: è a termini ≥ 0 , quindi ho + possibilità.② Se $\sum |a_n|$ converge, allora converge anche $\sum a_n$ ③ Se $\sum |a_n| = +\infty$, allora boh (bisogna provare altro).

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Serie a segno alternato con $a_n = \frac{1}{n}$.

Faccio i 3 controlli:

(i) $a_n \geq 0$, cioè $\frac{1}{n} \geq 0$: banale

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$, cioè $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$: vero per ogni $n \geq 1$ (denom. + grande, frazione + piccola).

(iii) $a_n \rightarrow 0$: banale.

Quindi la serie converge per Leibnitz.

Cosa succedeva usando l'assoluta convergenza? $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, quindi $|a_n| = \frac{1}{n}$, quindi

$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n} = +\infty, \text{ quindi no!}$$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

Con Leibnitz funziona come prima: $a_n = \frac{1}{n^2}$ (fare i controlli)

Con l'assoluta convergenza ho che $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^2}$ che converge, quindi $\sum a_n$ converge.

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^3}$

Metodo 1 : $\underbrace{\frac{\cos(n!)}{n^3}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{b_n}$

Ora $\sum b_n$ converge (armonica con $a=3>1$)
quindi $\sum a_n$ converge

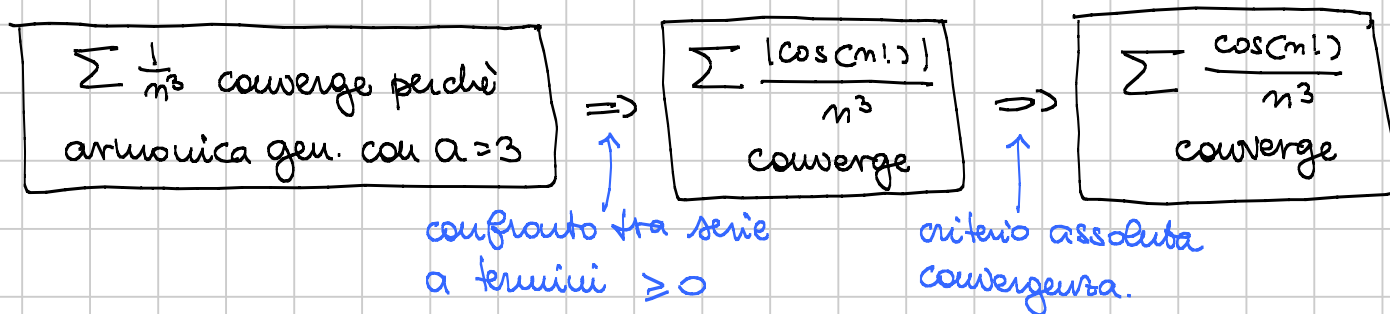
NO !!!!!

Achtung! Il criterio del confronto vale solo tra serie con termini ≥ 0 ,
e in questo caso non ho nessuna garanzia che $\cos(n!) \geq 0$

Metodo 2 Essendo a_n a segni variabili, provo con l'assoluta convergenza.

Studio quindi $\sum |a_n| = \sum \frac{|\cos(n!)|}{n^3}$

Ora $\frac{|\cos(n!)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ per ogni $n \geq 1$, quindi ho che



Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{n^3+3}{n^2+2}$ Leibnitz...

"du

Ora $du \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow du$ non tende a 0 $\Rightarrow$ manca la condizione necess.
 $\Rightarrow$ la serie non converge. Restano 3 possibilità.

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

"du

Facciamo i 3 controlli:

(i) $du \geq 0$: banalmente vero per ogni $n \geq 1$

(ii) $du \rightarrow 0$: banale $du \rightarrow \sin 0 = 0$.

(iii) Debole decrescenza: devo vedere se $a_{n+1} \leq a_n$, cioè se

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Posso eliminare $\sin$ in quanto è funzione strett. crescente: resta

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{e questa è vera perché denominatore + piccolo}$$

$\Rightarrow$ frazione + grande.

Quindi la serie converge per Leibnitz.

Esempio 6 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^7+5n^5+3}{n^9-7n^7+5n^2-14}$ = du

(i) $a_n \geq 0$: vera definitivamente perché numeratore e denominatore tendono a $+\infty$, quindi sono definitivamente > 0

(iii) $a_n \rightarrow 0$: vero per confronto di ordini di infinito.

(iv) $a_{n+1} \leq a_n$: la disuguaglianza è il p.to debole di Leibnitz

Meglio cambiare strada e provare l'assoluta convergenza...

$\sum |a_n| = \sum a_n$ e questa converge per confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$.
definitivamente la frazione è > 0 Quindi la serie originaria converge.

Esempio 7 $\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+3}$

Con l'assoluta convergenza non viene... (provare!)

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n} + \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} \right\} = \boxed{\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}} + \sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} \right\}$$

converge per Leibnitz facile

$$\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} = \frac{n^3+2n - n^3-3}{n(n^3+3)} = \frac{2n-3}{n^4+3n} \quad \text{quindi}$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} \right\} = \sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n} \quad \text{e questa converge per assoluta convergenza.}$$

Conclusione: la serie data è somma di 2 serie convergenti, quindi converge.

— 0 — 0 —