

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 41

Titolo nota

26/10/2011

Data a_n si costruisce $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ succ. somme parziali

$$s_n \rightarrow ? \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

termini ≥ 0

Criterio del confronto Sia $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Dim.: Sia $s_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $s_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$.

A meno di cambiare un numero finito di termini (che non cambia il comportamento delle serie) possiamo assumere che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora si ha che

$$s_n^a \leq s_n^b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ci sono allora 2 situazioni.

Caso 1: se $\sum a_n = +\infty$, allora $s_n^a \rightarrow +\infty$, ma allora $s_n^b \rightarrow +\infty$, che è come dire che $\sum b_n = +\infty$

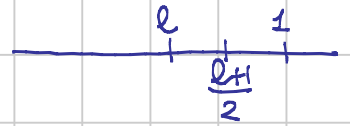
Caso 2: se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow s_n^b \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow s_n^a$ non può tendere a $+\infty$. Dovendo avere limiti (è monotona crescente) per forza $s_n^a \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ (con $l_1 \leq l$), quindi $\sum a_n$ converge.

Criterio della radice Se $a_n \geq 0$ definitivamente, e $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora

- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$
- $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $l = 1 \Rightarrow$ Boh.

Dim.: Caso $l > 1$ Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ per il criterio della radice applicato ai limiti, ma allora viene cond. necessaria, quindi la serie non può convergere, quindi diverge a $+\infty$ (termini ≥ 0).

Caso $l < 1$ Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$, quindi la serie potrebbe convergere, ma non è obbligata a farlo (FALSA PARTENZA!!)
 Partenza giusta: se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora



$0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$ definitivamente. Elevando alla n :

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n = b_n$$

Ora $\sum b_n$ è una serie geometrica con ragione $\frac{l+1}{2} < 1$, quindi converge perché già dimostrato. Per confronto anche $\sum a_n$ converge.

— 0 — 0 —

Oss. Il caso $l > 1$ del criterio del rapporto si dimostra come il caso $l > 1$ del criterio della radice.

Il caso $l < 1$ è più delicato, così come per le successioni.

— 0 — 0 —

Criterio del confronto asintotico. Sia $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente. Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0, \neq +\infty$.

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si comporta come $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dim.: Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$, allora



$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2l \text{ definitivamente.}$$

Moltiplico per b_n senza cambiare i versi (perché $b_n > 0$):

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq 2l b_n$$

Caso 1 $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum 2l b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
 ↑
 disuguaglianza di dx + confronto

Caso 2 $\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum \frac{l}{2} b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$
 ↑
 $\frac{l}{2} > 0$ ↑
 disuguaglianza di dx + confronto.

— 0 — 0 —

Casi limite di confronto asintotico. Sia $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivamente.

① Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$

[... allora $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ definitivamente, cioè $a_n \leq b_n$ definitiv., quindi]

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH.}$$

② Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$

[... allora $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ definitivamente, cioè $a_n \geq b_n$ definitiv., quindi]

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \text{BOH} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty.$$

— o — o —

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\log n}{n}} = a_n$ $a_n > 0$ definitiv.

Provo il confronto con $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = \log n \rightarrow +\infty \quad (\text{caso limite})$$

[$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \dots \Rightarrow a_n \geq b_n$ definitiv.]

$\sum \frac{1}{n} = +\infty$ perché armonica generalizzata con $a=1 \geq 1$, quindi

$$\sum a_n = \sum \frac{\log n}{n} = +\infty$$

Esempio 2 $\sum_{n=2}^{\infty} \boxed{\frac{1}{n^2 \log n}} = a_n$ Provo confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\cancel{n^2} \log n} \cdot \cancel{n^2} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0 \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ definit.} \right. \\ \left. \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ definitivamente} \right]$$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge (armonica generalizzata con $a=2 > 1$)

Quindi $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2 \log n}$ converge.

Esempio 3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^7 n}{n^2}$

Tentativo 1: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log^7 n}{n^2} \cdot n^2 = \log^7 n \rightarrow +\infty \quad \left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \dots \Rightarrow a_n \geq b_n \dots \right]$$

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge !!!

Tentativo 2: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log^7 n}{n^2} \cdot n = \frac{\log^7 n}{n} \rightarrow 0 \quad \left[\dots \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ definitivamente} \right]$$

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n$ diverge !!!

Tentativo 3 Confronto asintotico con

$$b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log^7 n}{n^2} \cdot n^{3/2} = \frac{\log^7 n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \dots \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ definitivamente} \right]$$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ e converge $(\frac{3}{2} > 1) \Rightarrow \sum a_n$ converge.

Oss. Invece di $\frac{3}{2}$ posso usare qualunque esponente a con $1 < a < 2$.

per serie convergenti. $\uparrow$
per $\lim = 0$ $\uparrow$

— o — o —

