

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 040

Titolo nota

22/10/2011

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2^n}$
 a_n

$a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$a_n \rightarrow 0$, quindi può convergere

Criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+3} = \frac{1}{2} \frac{n+4}{n+3} \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$

Limite del rapporto $< 1 \Rightarrow$ la serie converge.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n!}$

$a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow 0$

Criterio del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} + (n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n + n^2}$
 $= \frac{1}{n+1} \frac{2^{n+1} + (n+1)^2}{2^n + n^2} = \frac{1}{n+1} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{1 + \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{1 + \frac{n^2}{2^n}} \rightarrow 0$

Limite del rapporto $< 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 3 $\sum_{n=10}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$a_n \rightarrow$ non chiarissimo per ora

Criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ a cosa tende?
 $= e^{n \log(1 - \frac{1}{n})}$
 $= e$

Faccio il limite dell'esponente

$n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ Pongo $x = -\frac{1}{n}$ e diventa il solito

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{-x} = -1$ (Brutale: $n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \sim -1$)

Quindi $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Brutale: $a_n \sim \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ geometrica con $a = \frac{4}{5} \Rightarrow$ converge

Rigoroso 1° modo: criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}} = \sqrt[n]{\frac{4^n \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{5^n \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}} = \frac{4}{5} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} \right\}^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{4}{5}$$

$\downarrow \frac{4}{5}$ $\downarrow 1 = 1$

Quindi $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow$ la serie converge.

Rigoroso 2° modo: confronto asintotico con $b_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n} \cdot \frac{5^n}{4^n} = \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} \rightarrow 1 \neq 0, \neq +\infty$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$. Ora $\sum b_n$ so che converge perché è geometrica con ragione $a = \frac{4}{5}$, dunque converge. Ma allora converge anche $\sum a_n$, che è quella data.

Esempio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 6n^2 + 1}$

$a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$a_n \rightarrow 0$, quindi può convergere

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n}$ diverge perché armonica generalizzata con $\alpha = 1$.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$ (suggerito sopra)

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 + 3}{n^3 + 6n^2 + 1} \cdot n = \frac{n^3 + 3n}{n^3 + 6n^2 + 1} \rightarrow 1 \neq 0, \neq +\infty$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, cioè diverge.

Esempio 6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n! + 5}{n+7}$

$a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
infatti $\sin n + \cos n! + 5 \geq 3$

Ora abbiamo che

$$\boxed{\frac{\sin n + \cos(n!) + 5}{n+7}} \geq \boxed{\frac{3}{n+7}} \quad \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}$$

(ho preso la disug. di sopra e diviso per $n+7$ che è > 0)

Ora $\sum b_n = \sum \frac{3}{n+7}$ diverge per confronto asintotico con $\sum \frac{1}{n}$ (stile esempio 5), quindi per confronto semplice anche $\sum a_n$ diverge ($\rightarrow +\infty$).

Esempio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \sinh\left(\frac{n^2+5}{n^4-25n^2+2}\right)$

$a_n \geq 0$ definitivamente
(denominatore $\rightarrow +\infty$, quindi denominatore > 0 definitiv.)

Brutale: $a_n \sim \sinh\left(\frac{n^2}{n^4}\right) = \sinh\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$

$\sinh x \sim x$ per $x \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ armonica generalizzata con $a=2 \Rightarrow$ converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \sinh\left(\frac{n^2+5}{n^4-25n^2+2}\right) \cdot n^2 = \frac{\sinh(\dots)}{(\dots)} \cdot \frac{n^2+5}{n^4-25n^2+2} \cdot n^2 \rightarrow 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$

Pongo $x = \dots$
Quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $x \rightarrow 0$
e ottengo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ che converge perché armonica generalizzata con $a=2$.

Esempio 8 $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \arctan\left(\frac{n^3}{3^n}\right)$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Brutale: $a_n = n^2 \cdot \arctan\left(\frac{n^3}{3^n}\right) \sim n^2 \cdot \frac{n^3}{3^n} = \frac{n^5}{3^n} = b_n$
 $\downarrow$ $\uparrow$
 0 $\arctan x \sim x$ quando $x \rightarrow 0$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{n^5}{3^n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \dots \rightarrow 1 \neq 0$ $\neq +\infty$ Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$

Ora $\sum b_n$ lo studio con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3} \sqrt[n]{n^5} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$$

Quindi $\sqrt[n]{b_n} \rightarrow \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum b_n$ converge per il criterio della radice

$\Rightarrow \sum a_n$ converge per confronto asintotico.
— o — o —