

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 039

Titolo nota

22/10/2011

succ. $a_n \rightsquigarrow$ costruisco s_n somme parziali $\rightsquigarrow$ limite degli s_n
 $\rightsquigarrow$ comportamento serie

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2+n}}_{a_n}$ $a_n \rightarrow 0$, quindi la serie potrebbe convergere

$$a_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots$$

Quindi

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{restano solo il 1° e l'ultimo})$$

Quindi $s_n \rightarrow 1$, cioè la serie converge a 1. Detto coi puntini

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 1$$

Esercizio Dimostrare formalmente per induzione che $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \geq 1$ (si usa che $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$)

Esempio 2 $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ $a_n = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$, quindi la serie potrebbe convergere

$$a_n = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \log \frac{n-1}{n} = \log(n-1) - \log n$$

$$a_2 = \log 1 - \log 2, \quad a_3 = \log 2 - \log 3, \quad a_4 = \log 3 - \log 4, \dots \quad \text{Quindi}$$

$$s_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n = (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + (\log 3 - \log 4) + \dots + (\log(n-1) - \log n) = \log 1 - \log n = -\log n$$

Quindi $s_n \rightarrow -\infty$ e la serie diverge a $-\infty$. Dim. form. formula $s_n = \dots$
— 0 — 0 —

Oss. Si chiamano telescopiche le serie in cui c'è questo fenomeno di cancellazione. Sono sostanzialmente le uniche serie (oltre alle geometriche) per cui è facile calcolare la somma s_n .

Oss. Nei 2 esempi precedenti la condizione necessaria è soddisfatta (cioè $a_n \rightarrow 0$), ma la serie in un caso converge, nell'altro no.

— 0 — 0 —

Obiettivo futuro: studiare la convergenza di una serie (cioè stabilire se è di tipo ① o ②) SENZA trovare una formula esplicita per s_n . Si vuole sapere solo se il limite di s_n è $\in \mathbb{R}$ oppure no, senza voler sapere il valore.

CRITERI DI CONVERGENZA Rispondono al problema precedente.

Serie a termini ≥ 0 ($a_n \geq 0$ definitivi.)
(basta a_n a segno costante: altrimenti "porto fuori il -")

- Criterio della radice
- Criterio del rapporto
- Criterio del confronto
- Criterio del confronto asintotico $\nearrow$ casi standard
 $\searrow$ casi limite

Serie a termini di segno variabile

- Criterio di LEIBNITZ
- Criterio dell'assoluta converg.

Serie con $a_n \geq 0$ Fatto fondamentale: una serie con $a_n \geq 0$ definitivamente ha solo 2 possibilità:

- convergere
- divergere a $+\infty$

Dim.: Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora s_n è definitivamente debolmente crescente ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$). Quindi per il teorema sulle successioni monotone si conclude.

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\arctan \frac{n^2+3}{n^2+7}}_{a_n}$ $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
 $a_n \rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \neq 0$

$a_n \geq 0 \Rightarrow$ può solo convergere o divergere a $+\infty$

$a_n \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ condizione necessaria non verificata $\Rightarrow$ non può conv.

Quindi l'unica possibilità è che la serie diverga a $+\infty$ (cioè $s_n \rightarrow +\infty$).
 — o — o —

Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente. Supponiamo che
 $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Allora

- Se $l > 1$, la serie diverge
- Se $l < 1$, la serie converge
- se $l = 1$, allora B.N.

Criterio del rapporto. Come sopra con $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$.

Criterio del confronto Siano a_n e b_n 2 successioni con
 $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente

Allora valgono queste implicazioni (e solo questo)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge (ad un valore più piccolo)}$$

Criterio del confronto asintotico (caso standard)

Siano a_n e b_n 2 successioni con $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitiv.

Supponiamo che

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \neq 0 \neq +\infty$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento (se una converge, allora converge anche l'altra (magari ad un valore diverso); se una diverge, allora diverge anche l'altra).

Operativamente: confronto e confronto asintotico permettono di dedurre il comportamento di una serie con termine a_n dato dal comportamento di una serie nota con termine b_n .

Quindi serve una tabellina di serie con cui confrontare. Già abbiamo le serie geometriche.

Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$