

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 038

Titolo nota

22/10/2011

SERIE Sia a_n una successione. Una serie è una scrittura del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=122}^{\infty} a_n$$

Brutalmente: serie = somma degli infiniti termini della successione.

Problema: cosa vuol dire sommare infiniti numeri?

Somme parziali Data la succ. a_n , costruisco una nuova succ. s_n così definita:

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

In formule

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

(N.B.: questa è una sommatoria di un numero finito di numeri)

La serie si definisce come il limite delle somme parziali per $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

Come tutti i limiti, una serie ha 4 possibilità

- essere un numero $l \in \mathbb{R}$ (la serie converge ad l)
- essere $+\infty$ (la serie diverge a $+\infty$)
- " $-\infty$ " " " " " $-\infty$
- non esistere (la serie è indeterminata)

Esempio banale 1 $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo caso

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0 \rightarrow 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Esempio banale 2 $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $s_n = n+1$ (c'è anche a_0)

$$s_n \rightarrow +\infty \quad \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

Esempio banale 3 $a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$$s_0 = a_0 = 1, \quad s_1 = a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - 1 + 1 = 1$$

Quindi $s_n = 1$ per n pari e $s_n = 0$ per n dispari, quindi s_n non ha limite, dunque la serie è indeterminata.

Oss. Se ho $\sum_{n=22}^{\infty} a_n$, ovviamente costruisco le somme parziali a partire da a_{22} :

$$s_{22} = a_{22}, \quad s_{23} = a_{22} + a_{23}, \quad s_{24} = a_{22} + a_{23} + a_{24}, \dots$$

In alternativa posso definirle come prima facendo finta che i termini $a_0, a_1, \dots, a_{21}$ siano tutti 0.

Oss. Se in una serie cambio un numero finito di termini, allora non cambia il comportamento, ma al più cambia il valore dell'eventuale somma. Di conseguenza il comportamento di una serie (cioè l'essere di tipo ①, ②, ③, ④) dipende da come è fatta a_n definitivamente.

Condizione necessaria Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$

Conseguenza. Devo studiare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Provo a fare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

- Se il limite non viene 0 (cioè viene un certo $l \in \mathbb{R}$ con $l \neq 0$), allora di sicuro la serie non converge (e le restano 3 comportamenti possibili).
- Se il limite viene 0, allora BOK (cioè la serie può convergere, ma non è obbligata a farlo (restano 4 comportamenti possibili)).

Dim.: Sia s_n la successione delle somme parziali. Per ipotesi la serie converge, dunque $s_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Ora $a_n = s_n - s_{n-1}$
($s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})$)

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \\ l - l = 0 \quad \text{Quindi } a_n \rightarrow 0.$$

Proprietà algebriche $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

La serie della somma è la somma delle serie nelle stesse ipotesi in cui il limite della somma è la somma dei limiti.

Dim.: Pongo $c_n = a_n + b_n$. Chiamo $s_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$
 $s_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$
 $s_n^c = c_0 + c_1 + \dots + c_n$

Allora $s_n^c = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$ (proprietà commutativa)
 $= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$ (somme finite)
 $= s_n^a + s_n^b$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^c = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n^a + s_n^b) = (\text{tranne in certi casi})$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^a + \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^b = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (dim. per esercizio)

Achtung! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (tranne casi speciali)

Vale anche per le somme finite $a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$

SERIE GEOMETRICHE Sono le serie con $a_n = a^n$, dove a è un parametro

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots \quad (\text{somma potenze di un certo } a \text{ fisso})$$

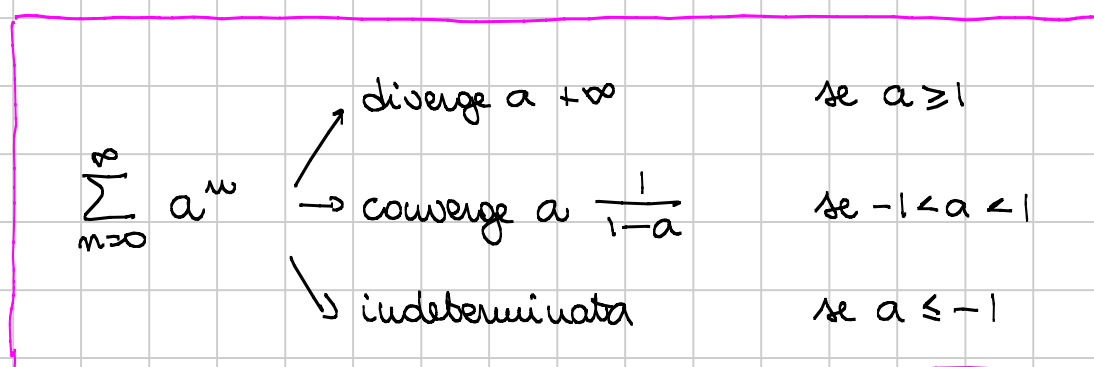
A suo tempo per induzione si è dim. che

$$s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (\text{se } a \neq 1)$$

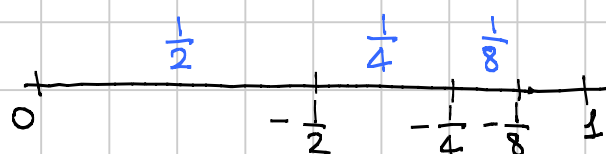
Bisogna fare il limite per $n \rightarrow +\infty$. Ci sono vari casi

- Se $\boxed{a > 1}$, allora num $\rightarrow +\infty$, den. > 0 , quindi $s_n \rightarrow +\infty$ e la serie diverge a $+\infty$
- Se $\boxed{-1 < a < 1}$, cioè $|a| < 1$, allora $a^{n+1} \rightarrow 0$, quindi $s_n \rightarrow \frac{-1}{a-1}$ cioè la serie converge a $\frac{1}{1-a}$
- Se $\boxed{a = -1}$, allora denom = -2 , e num. è alternativamente $0, -2$, quindi la serie non converge (è l'esempio banale 3): è indet.
- Se $\boxed{a < -1}$, allora denom = $a-1$ = numero negativo e numeratore $\rightarrow +\infty$ se n è dispari ($n+1$ diventa pari) e numeratore $\rightarrow -\infty$ se n è pari. Quindi s_n non ha limite e la serie è indeterminata.
- Se $\boxed{a = 1}$, allora non posso usare la stessa formula, ma siamo nell'esempio banale 2 e la serie diverge a $+\infty$.

In conclusione per le serie geometriche abbiamo che



Oss. Paradosso di Zenone



$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ = serie geometrica che converge a 1.