

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 037

Titolo nota

21/10/2011

Sviluppi di Taylor con centro x_0 qualunque

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

↑
per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Si ricava dall'altra ponendo $R = x - x_0$ e $g(R) = f(x_0 + R)$.

Quando $x \rightarrow x_0$, ho che $R \rightarrow 0$, quindi posso scrivere

$$g(R) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} R^k + o(R^n) \text{ per } R \rightarrow 0$$

Taylor per $g(R)$ con centro in $R=0$

Osservo che $g(R) = f(x_0 + R) = f(x)$ e che $g^{(k)}(R) = f^{(k)}(x_0 + R)$, quindi $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$. Sostituendo $g(R)$, R , e le derivate di g ottengo la formula per f .

Altro modo di scrivere la stessa cosa

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k + o(R^n) \text{ per } R \rightarrow 0 \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} R + \frac{f''(x_0)}{2!} R^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n + o(R^n) \end{aligned}$$

Esempio 1 $f(x) = \arctan x$ $x_0 = 1$ $n = 3$ Bisogna calcolare le derivate!

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = -2 \frac{(1+x^2)^2 - 2(1+x^2) \cdot 2x \cdot x}{(1+x^2)^4}$$

$$\text{Quindi } f'''(x) = -2 \frac{(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^3} = -2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

Calcolo le derivate in $x_0 = 1$: $f(x_0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, $f''(x_0) = -\frac{1}{2}$, $f'''(x_0) = -2 \frac{-2}{8} = \frac{1}{2}$. Quindi

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0)R + \frac{1}{2}f''(x_0)R^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)R^3 + o(R^3)$$

$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}R^3 + o(R^3)$$

sviluppo di arctan
centrato in $x_0 = 1$
e ordine 3

Esempio 2 $f(x) = \sin x$ $x_0 = 1$ $n = 3$

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x$$

Calcolo in $x_0 = 1$: $f(x_0) = \sin 1$, $f'(x_0) = \cos 1$, $f''(x_0) = -\sin 1$
 $f'''(x_0) = -\cos 1$. Quindi

$$\sin(1+R) = \sin 1 + \cos 1 \cdot R - \frac{1}{2} \sin 1 R^2 - \frac{1}{6} \cos 1 R^3 + o(R^3) \text{ per } R \rightarrow 0$$

Si poteva giungere allo stesso risultato usando le formule di addizione:

$$\sin(1+R) = \sin 1 \cdot \cos R + \cos 1 \cdot \sin R \quad \text{ora posso usare gli sviluppi per } \sin R \text{ e } \cos R$$

$$= \sin 1 \cdot \left(1 - \frac{R^2}{2} + o(R^3)\right) + \cos 1 \cdot \left(R - \frac{1}{6}R^3 + o(R^3)\right)$$

Esempio 3 Voglio sviluppare $\arctan(\cos x)$ con centro in 0 e $n = 4$

Non posso farlo utilizzando lo sviluppo di arctan in 0, perché $\cos x \rightarrow 1$.
 Dovrò usare lo sviluppo di arctan in 1.

$$\arctan(\cos x) = \arctan\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) \quad \text{lo penso come}$$

$$\arctan(1+R) \text{ con } R = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

(osservo che $R \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$)

$$\text{So da prima che } \arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + o(R^2)$$

Sostituendo ho:

$$\arctan(\cos x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right\} - \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right\}^2 + o(R^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

in R posso racc. x^2 ,
quindi in R^2 posso
racc. x^4

Esempio 4 Taylor con limiti di successioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right) \quad [= +\infty \cdot (0-0)]$$

Oss.: gli argomenti di $\sin$ e $\arctan$ tendono a 0, quindi dove si può applicare Taylor.

Safe mode

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3}$$

Taylor con $n=3$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$x = \frac{1}{n}$
quando $n \rightarrow +\infty$
ho che $x \rightarrow 0$

Expert mode

$$n^3 \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right) = n^3 \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

$$= n^3 \left(\frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = \frac{1}{6} + \boxed{n^3 \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$\frac{o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} \rightarrow 0$$

$$\boxed{o(1)} \rightarrow 0$$

sarebbe il solo ω

Esempio 5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan n - \sinh n}{n^3} = -\infty$$

expert mode:

$$\frac{\arctan n - \sinh n}{n^3} = \frac{\cancel{n} - \frac{1}{3}n^3 - \cancel{n} - \frac{1}{6}n^3 + o(n^3)}{n^3} \rightarrow \frac{1}{2}$$

NO !!!!! Gli argomenti di $\sinh$ e $\arctan$ non tendono a 0 !!!

$$\left[= \frac{\frac{\pi}{2} - \infty}{+\infty} \right]$$

$$= \frac{\arctan n}{n^3} - \frac{\sinh n}{n^3}$$

esponenziale contro potenza