

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 036

Titolo nota

21/10/2011

Esempio $f(x) = \arctan(\cos x)$ $n=4$

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^4) \quad \text{Pongo } t = \cos x$$

$$\arctan(\cos x) = \cos x - \frac{1}{3}(\cos x)^3 + o((\cos x)^4)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{3}(\quad)^3 + o(\underbrace{(\cos x)^4}_{o(x^4)})$$

È vero che $o((\cos x)^4) = o(x^4)$. **NO!!!!**

Brutalmente: non è vero che $(\cos x) \sim x$, quindi $(\cos x)^4 \sim x^4$. Questo andava bene quando al posto di $\cos x$ c'erano $\sin x$ o $\arctan x$...

Lo sviluppo di $\arctan(\cos x)$ NON si può fare componendo gli sviluppi perché $\cos x \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow \infty$, mentre gli sviluppi vanno bene quando gli argomenti tendono a 0.

$\cos(\arctan x)$ OK
 $e^{\sin x}$ OK

$\arctan(\cos x)$ NO
 $\sin(e^x)$ NO

non tende a 0 per $x \rightarrow \infty$

e^x tende a ∞ .

$\sin(e^x - 1)$ OK perché $e^x - 1$ tende a ∞ .

$\sin(e^x - 1)$ con $n=4$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \quad \text{Pongo } t = e^x - 1 \quad (\text{osservo che } t \rightarrow \infty \text{ quando } x \rightarrow \infty)$$

$$\sin(e^x - 1) = (e^x - 1) - \frac{1}{6}(e^x - 1)^3 + o((e^x - 1)^4)$$

OK perché $(e^x - 1)^4 \sim x^4$

$$= \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^3 + o(x^4)$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^4\right) + o(x^4)$$

Parentesi: $(Mostro)^2 = \text{somma dei quadrati} + \text{tutti i doppi prodotti}$

$(Mostro)^3 \rightarrow \text{supercauto } Mostro^2 \cdot Mostro$

$\rightarrow \text{somma di tutti i cubi} +$

$+ \text{somma di tutti i } 3a^2b \text{ (compresi } 3ab^2)$

$+ \text{somma di tutti i } 6abc \text{ (scegliendo in tutti i modi possibili } abc)$

$$(Mostro)^4 = (Mostro)^2 \cdot (Mostro)^2$$

$$(e^x - 1)^3 = \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right)^3$$

$$= x^3 + \underbrace{\frac{3}{2}x^4}_{\substack{\uparrow \\ 3 \cdot (x)^2 \cdot (\frac{1}{2}x^2)}} + o(x^4)$$

— o — o — o —

Esempio 2 $f(x) = \sin^2 x \cdot \arctan x$ sviluppo con $n=4$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$\uparrow$ doppio prodotto

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right) \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \right) = x^3 + o(x^4)$$

Più astuto: $\sin x = x + o(x^2) \Rightarrow \sin^2 x = x^2 + o(x^3)$

$$\sin^2 x = x^2 + 2x \cdot o(x^2) + [o(x^2)]^2$$

$$= x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x + o(x^2)$$

$$\sin x \cdot \arctan x = (x^2 + o(x^3)) (x + o(x^2))$$

$$= x^3 + x^2 \cdot o(x^2) + x \cdot o(x^3) + o(x^3) \cdot o(x^2)$$

$$= x^3 + o(x^4) + o(x^4) + o(x^5)$$

$\leftarrow$

Achtung! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+x^3) - \arctan x}{\log(1+2\sin^3 x)} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$

Giocandoci sull'ordine 3, faccio gli sviluppi con $n=3$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad \text{Pongo } t = 2\sin^3 x$$

$$\begin{aligned} \log(1+2\sin^3 x) &= 2\sin^3 x + o(2\sin^3 x) \\ &= 2x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\sin(x+x^3) = x + x^3 + o(x^3) \quad \text{NO!!!!!!}$$

$$\sin t = t + o(t) \quad \text{Pongo } t = x+x^3 \text{ diventa}$$

$$\sin(x+x^3) = (x+x^3) + o(x+x^3)$$

$o(x)$ è basta $= x + o(x)$ così ho $n=1$

N.B. $o(x+x^3) = (x+x^3)\omega(x) = \otimes (1+x^2)\omega(x)$

Corretto: $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$

$$\begin{aligned} \sin(x+x^3) &= (x+x^3) - \frac{1}{6}(x+x^3)^3 + o((x+x^3)^3) \\ &= x + x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Finale: $\text{Frazione} = \frac{\cancel{x} + x^3 - \frac{1}{6}x^3 - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)}$

$$= \frac{\frac{2}{6}x^3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} = \text{raccolgo } x^3 \dots = \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{\arctan^2 x}}$

Faccio e-alla e mi riduco all'esponente

$$\frac{1}{\arctan^2 x} \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \text{ quindi } \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

Nota bene: $\frac{o(x^3)}{x} = o(x^2)$

$$\frac{x^3 \omega(x)}{x} = x^2 \omega(x)$$

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)$$

Uso $\log(1+t) = t + o(t)$ con $t = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$. Ottengo

$$\log\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2) + o\left(-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

Quindi
$$\frac{1}{\arctan^2 x} \cdot \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \rightarrow -\frac{1}{6}$$

Si può fare approccio misto

$\frac{x^2}{\arctan^2 x}$	$\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
limite notevole ↓ 1	Taylor come sopra ↓ $-\frac{1}{6}$