

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 035

Titolo nota

21/10/2011

Formula di Taylor (McLaurin) con resto di Peano

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

Polinomio di Taylor di somma, differenza, prodotto si ottengono facendo la stessa operazione sui polinomi.

Esempio 1 $f(x) = \cos x \cdot e^x + \sin x \quad n=4$

$$= \left\{ 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \right\} \left\{ 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) \right\}$$

$\cos x$ e^x

$$+ \left\{ x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^4) \right\}$$

$\sin x$

$$= \textcircled{1} + \textcircled{x} + \cancel{\frac{1}{2} x^2} + \cancel{\frac{1}{6} x^3} + \frac{1}{24} x^4 - \cancel{\frac{1}{2} x^2} - \textcircled{\frac{1}{2} x^3} - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{24} x^4$$
$$+ \textcircled{x} - \cancel{\frac{1}{6} x^3} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1-3}{12}$$

$$= 1 + 2x - \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{6} x^4 + o(x^4)$$

Domanda: quanto vale $f'''(0)$? Quanto vale $f^{(4)}(0)$?

Il coeff. di x^3 nel polinomio di Taylor è $\frac{f'''(0)}{6}$. Nel nostro caso vale $-\frac{1}{2}$.

Quindi

$$\frac{f'''(0)}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f'''(0) = -3$$

Allo stesso modo

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{1}{6} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -\frac{1}{6} \cdot 24 = -4$$

Polinomi di Taylor della composizione

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + o(x^5) \quad n=5$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6} (2x)^3 + \frac{1}{120} (2x)^5 + o((2x)^5)$$

$$= 2x - \frac{4}{3} x^3 + \frac{32}{120} x^5 + o(32x^5) = 2x - \frac{4}{3} x^3 + \frac{4}{15} x^5 + o(x^5)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

(cambio x con $-x$: nei gradi pari non succede nulla, nei dispari cambio il segno)

Sommando e dividendo per 2 ottengo...

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + o(x^4)$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \log(1-2x) &= (-2x) - \frac{1}{2} (-2x)^2 + \frac{1}{3} (-2x)^3 - \frac{1}{4} (-2x)^4 + o((-2x)^4) \\ &= -2x - 2x^2 - \frac{8}{3} x^3 - 4x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Si può vedere in 2 modi: metto $-2x$ al posto di x in $\log(1+x)$
metto $2x$ al posto di x in $\log(1-x)$

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + o(x^5)$$

$$\sin x^4 = x^4 - \frac{1}{6} x^{12} + \frac{1}{120} x^{20} + o(x^{20})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + x^5 \omega(x); \quad \sin x^4 = x^4 - \frac{1}{6} x^{12} + \frac{1}{120} x^{20} + x^{20} \omega(x^4)$$

$\omega_1(x) \rightarrow 0$

È anche vero che $\sin x^4 = x^4 - \frac{1}{6} x^{12} + \frac{1}{120} x^{20} + o(x^{27})$ è corretta
↓ il termine successivo sarebbe in x^{28}

$$\arctan(x^3) = x^3 - \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{5}x^{15} + o(x^{15}) \text{ e volendo } o(x^{20})$$

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + o(t^5)$$

$e^{\sin x}$ sviluppo con $n=3$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \quad \text{Al posto di } t \text{ metto } \sin x$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3)$$

Al posto di qui $\sin x$ sostituisco il suo sviluppo di ordine 3:

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}_{\text{resta solo } x^2} + \frac{1}{6}(\dots)^3 + o((\dots)^3)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + o(x^3) + \boxed{o((\sin x)^3)}$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

È vero che $o((\sin x)^3) = o(x^3)$? Sì, e si verifica in tanti modi

1° modo: $o((\sin x)^3) = (\sin x)^3 \cdot w(x)$
 $= x^3 \cdot \underbrace{\frac{(\sin x)^3}{x^3} \cdot w(x)}_{w_1(x) \rightarrow 0}$

2° modo: $(\sin x)^3 = x^3 + o(x^3)$, quindi $o((\sin x)^3) = o(x^3 + o(x^3))$
 $= o(x^3) + o(o(x^3))$
 $= o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$

Brutalmente! $\sin x$ e x sono forti uguali, quindi
 $(\sin x)^3$ e x^3 " " " , quindi
 chi batte $(\sin x)^3$ batte x^3 e viceversa.

Altro esempio

$$\cos(\arctan x)$$

$$n = 4$$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + o(t^4)$$

$$\text{Pongo } t = \arctan x$$

$$\cos(\arctan x) = 1 - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \frac{1}{24} (\arctan x)^4 + o((\arctan x)^4)$$

Sostituisco qui $\arctan x$ con il suo sviluppo di ordine 4:

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{24} (\dots)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{2}{3} x^4 \right) + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

↑
doppio prodotto
 $2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{3} x^3\right)$

$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^4 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + o(x^5)$$

perché $\cos(\arctan x)$ è pari
e quindi il coeff. di x^5 è di
segno 0.