

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 034

Titolo nota

20/10/2011

Formula per i polinomi di Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

Caso $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(k)}(x) = e^x$$

Quindi $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

Quindi il coeff. di x^k nello sviluppo di e^x è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

Caso $f(x) = \sin x$

$$f^{(0)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x$$

$\vdots$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

$$\dots f^{(2011)}(x) = -\cos x$$

Sostituendo $x=0$ troviamo

$$f^{(0)}(0) = 0, f^{(1)}(0) = 1, f^{(2)}(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, \text{ e così via ciclicam.}$$

Quindi abbiamo 0 per k pari e ± 1 alternati per k dispari, quindi i coeff. nei polinomi di Taylor sono 0 per le potenze pari e $\frac{\pm 1}{k!}$ per le potenze dispari:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Caso $f(x) = \cos x$

Le derivate si ripetono ancora con periodo 4, traslate di uno rispetto al caso precedente.

Quindi $f^{(0)}(0), f^{(1)}(0), \dots$ viene 0 sui dispari, e ± 1 alternati sui pari.

Caso $f(x) = \sinh x$ $f^{(0)}(x) = \sinh x = f^{(\text{pari})}(x)$
 $f^{(1)}(x) = \cosh x = f^{(\text{disp.})}(x)$

Quando sostituisco $x=0$ ottengo alternativamente 0 e 1, sempre con il segno +.

Per $\cosh x$ è la stessa cosa.

Oss. lo sviluppo di $\sinh x$ prende tutti i termini dispari di quello di e^x
 " " " $\cosh x$ " " " pari " " " ".

Quindi, almeno formalmente, $\sinh x + \cosh x = e^x$. D'altra parte

$$\sinh x + \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x$$

Caso $f(x) = \log(1+x)$ Mi serve una formula per $f^{(k)}(0)$, quindi sarebbe utile una formula per $f^{(k)}(x)$.

Esperimenti: $f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}$, $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$$f^{(3)}(x) = [-(1+x)^{-2}]' = -(-2)(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = [2(1+x)^{-3}]' = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Congettura: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

Dim per induzione Passo base: $k=1$ banale sostituzione

Passo induttivo: Ipotesi: la formula vale per un certo k

Tesi: vale per il k successivo ($k+1$)

Dim.: $f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = \left[(-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \right]'$
 ↑
 uso Hp

calcolo la derivata $\rightarrow = (-1)^{k+1} (k-1)! [(1+x)^{-k}]'$

$$= (-1)^{k+1} (k-1)! (-k)(1+x)^{-k-1}$$

$$= (-1)^{k+2} k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \text{ che è quanto volevo}$$

In conclusione il coeff. di x^k nello sviluppo di $\log(1+x)$ è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

↑
metto $x=0$ nella
formula per $f^{(k)}(x)$

Quindi resta $\frac{1}{k}$ con segni alternati
+ sui dispari e - sui pari

Esercizio: dimostrare lo sviluppo di $(1+x)^a$, trovando la formula
per $f^{(k)}(x)$.

— o — o —

Noti gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari, si ottengono
gli sviluppi di funzioni ottenute mediante operazioni algebriche e/o
composizioni bypassando il calcolo di derivate.

Somma e differenza Se $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ e $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$
allora

$$f(x) \pm g(x) = P_n(x) \pm Q_n(x) + o(x^n)$$

quindi basta sommare / sottrarre i polinomi di Taylor.

Dim. Sommare le due scritte e usare che $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

Prodotto Siano f e g come sopra. Allora

$$f(x) \cdot g(x) = P_n(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n)$$

Dim.:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \{P_n(x) + o(x^n)\} \cdot \{Q_n(x) + o(x^n)\} \\ &= \{P_n(x) + x^n \omega_1(x)\} \cdot \{Q_n(x) + x^n \cdot \omega_2(x)\} \\ &= P_n(x) \cdot Q_n(x) + P_n(x) \cdot x^n \cdot \omega_2(x) + \\ &\quad + Q_n(x) \cdot x^n \omega_1(x) + x^{2n} \omega_1(x) \cdot \omega_2(x) \\ &= P_n(x) \cdot Q_n(x) + x^n \underbrace{\{P_n(x) \cdot \omega_2(x) + Q_n(x) \cdot \omega_1(x) + x^n \omega_1(x) \cdot \omega_2(x)\}}_{\omega_3(x) \rightarrow 0+0+0=0} \\ &= P_n(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo del prodotto si ottiene moltiplicando gli sviluppi. Nel moltiplicare i polinomi posso ignorare tutti i termini di grado $> n$ (vengono mangiati da $O(x^n)$).

Esempio 1

$$\cos x + 2 \sin x$$

$$n = 4$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24} x^4 + O(x^4)$$

($\cos x$ con $n=4$)

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + O(x^4)$$

($\sin x$ con $n=4$)

$$\cos x + 2 \sin x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 2x - \frac{1}{3} x^3 + O(x^4)$$

$$= 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + O(x^4)$$

Esempio 2

$$\arctan x \cdot \sinh x$$

$$n = 5$$

$$\arctan x \cdot \sinh x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^5) \right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^5) \right)$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{3} + O(x^5)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^5)$$

— 0 — 0 —