

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 033

Titolo nota

20/10/2011

FORMULA DI TAYLOR Caso con centro in $x_0 = 0$.

Sia $f(x)$ una funzione, e sia $n \in \mathbb{N}$. Sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$, dipendente da n e dalla funzione, tale che $\text{grado}(P_n(x)) \leq n$ e vale

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla seguente formula

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned}$$

Oss. Le ipotesi sotto cui vale la formula sono l'esistenza delle derivate di $f(x)$ fino all'ordine n (le derivate fino alla $(n-1)$ -esima devono esistere in un intorno di $x_0 = 0$, la derivata n -esima basta che esista nel solo pto $x_0 = 0$).

Brutalmente: scrivere $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ vuol dire che posso sostituire $f(x)$ con un polinomio commettendo un errore che è $o(x^n)$.

Terminologia. Questa si chiama formula di Taylor con resto di PEANO, cioè scritto come o piccolo.

Oss. Gli sviluppi sono formule di Taylor con $n=1$, hanno $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ che ha $n=2$.

"Dim" nel caso speciale $n=3$ Devo dimostrare che

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3}_{P_3(x)} + o(x^3)$$

Per farlo porto il $P_3(x)$ a sx, divido per x^3 , e spero che il limite sia 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_3(x)}{x^3} = \left[\frac{f(0) - f(0)}{0} = \frac{0}{0} : \text{H\ddot{o}p} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - P_3'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{f'''(0)}{2}x^2}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}; \text{H\ddot{o}f} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)x}{6x} \quad \left[= \frac{f''(0) - f''(0)}{0} = \frac{0}{0} : \text{Hôp} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = f'''(0) - f'''(0) = 0 \text{ come volevamo.}$$

La situazione è del tutto analoga se invece di 3 abbiamo un qualunque n : serviremo n applicazioni di De L'Hopital.

Tabellina degli sviluppi di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \quad \sin 2x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots$$

α réel quelconque

$\binom{\alpha}{2}$ $\binom{\alpha}{3}$ $\binom{\alpha}{4}$

Oss.1 le funzioni dispari hanno solo potenze dispari nello sviluppo
 " pari " " " pari " " "

Oss.2 Casi particolari dell'ultimo sviluppo.

$\alpha = -1$ ottengo

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + \dots$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Oss.3 Voglio sviluppare $\sin x$ con $n=4$. Ottengo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P_4(x)}$

sviluppo con $n=4$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P_3(x)}$

sviluppo con $n=3$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^2)$$

È una formula corretta, ma in realtà inutile in quanto

$$\sin x = x + o(x^2)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{P_2(x)}$

$o(x^2)$ ingloba $\frac{x^3}{3!}$

← sviluppo di Taylor di $\sin x$ con $n=2$.

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$

Utilizzo gli sviluppi di Taylor con $n=3$ (deciso dal denominatore)

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ (da tabellina). Sostituisco:

$$\begin{aligned} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} &= \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \cancel{x^5}}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \\ &= \frac{\cancel{x^3} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)}{\cancel{x^3}} \rightarrow \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Cosa succede se scoglio ordine.

Ordine troppo basso: $\mu = 2$ sia $x = x + o(x^2)$

$$\frac{x - \cancel{8x} + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \cancel{8x} + 0(x^2) + x^5}{x^3} = \frac{0(x^2)}{x^3} = \frac{0(x^2)}{0(x^2)} = \text{Boh.}$$

Ordine troppo alto: $n=5$ $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

$$\frac{x - \sin x + x^3}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + x^5 + O(x^5)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{x^3} \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + x^2 + \frac{O(x^5)}{x^3} \right)}{\cancel{x^3}} \rightarrow \frac{1}{6}$$

Un po' di conti inutili.

Oss. brutale

Un limite si può fare con i limiti notevoli se e solo se bastano gli sviluppi di ordine 1.

Se lo scontro finale è tra potenze x^k , allora con l'Hôpital servirebbero k passaggi.

1 0 1 0 1