

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 032

Titolo nota

19/10/2011

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\sinh x$

$\cosh x$

$\tanh x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Simmetrie

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \quad \text{PARI}$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x \quad \text{DISPARI}$$

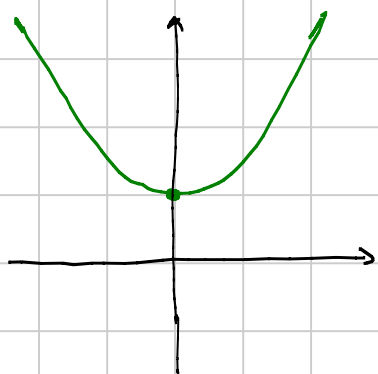
$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x \quad \text{DISPARI}$$

In $x=0$ $\cosh 0 = 1$ $\sinh 0 = \tanh 0 = 0$

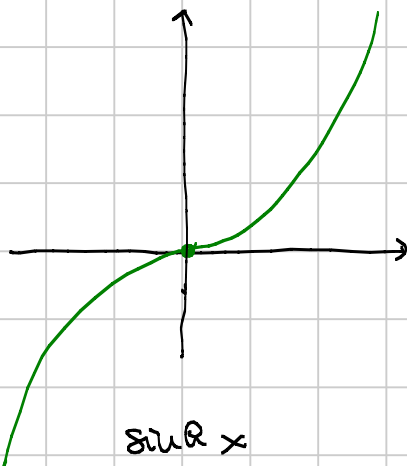
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty \quad (\text{è pari...}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty \quad (\text{è dispari})$$

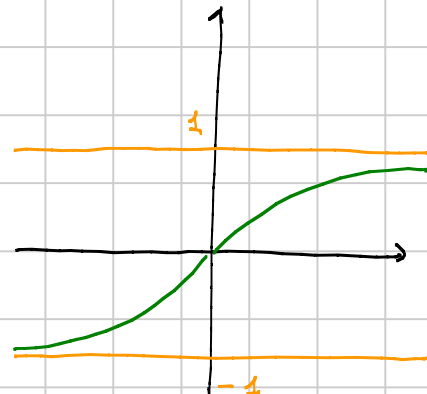
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$



$\cosh x$



$\sinh x$



$\tanh x$

Formule di duplicazione

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

$$\sinh x \cdot \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2 \cdot 2}$$

Quindi $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cdot \cosh x$ (analogamente alla trigonometria)

Esercizio Trovare formule per $\cosh(2x)$ (ci sono segni diversi rispetto alla trigonometria normale)

Formula fondamentale

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Quindi $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Derivate : $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (\text{uso relaz. fond.})$$
$$= 1 - \tanh^2 x$$

— o — o —

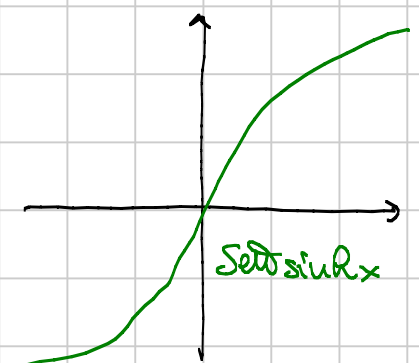
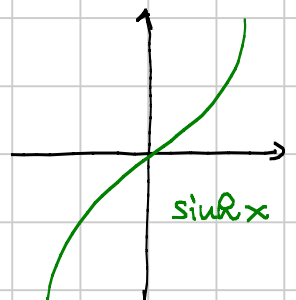
Funzioni inverse $\sinh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
è iniettiva, surgettiva, e
strettamente crescente.

Quindi ammette una funzione inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
che è $g(x) = \text{Sett} \sinh x$

↑
setore

Si tratta di una funzione dispari e
strettamente crescente.

— o — o —

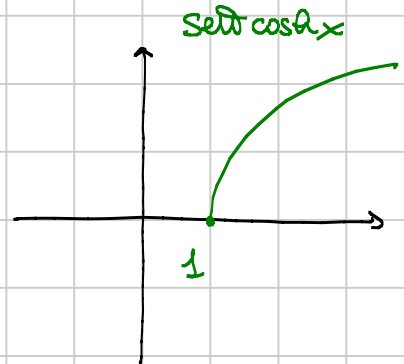
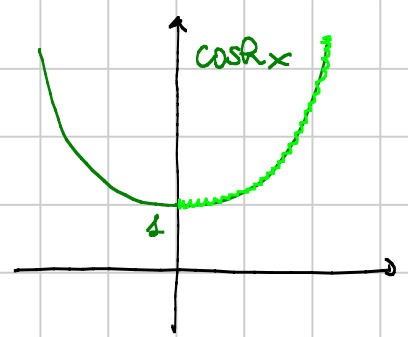


$\cosh x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né iniettiva, né suriettiva.

Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è invertibile, dunque ha un' inversa

$$g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

che è $g(x) = \operatorname{seth} \cosh x$.



Quindi: $\operatorname{seth} \cosh x$ prende in input valore reali qualunque e restituisce reali con lo stesso segno

• $\operatorname{seth} \cosh x$ prende in input valori reali ≥ 1 e restituisce reali ≥ 0

Analogamente si ottiene $\operatorname{seth} \tanh x$, che è una $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ (disegnare il grafico!).

Esercizio Trovare la formula per $\operatorname{seth} \cosh y$.

Questo vuol dire risolvere l'equazione $\cosh x = y$, cioè

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y ; \quad e^x + e^{-x} = 2y$$

Pongo $z = e^x$. Diventa $z + \frac{1}{z} = 2y$, cioè $z^2 + 1 = 2yz$, cioè $z^2 - 2yz + 1 = 0$, da cui

$$z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Questo ha senso per $y \geq 1$, che sono i valori per cui vado a definire $\operatorname{seth} \cosh y$

Tornando in x ottengo

$$x = \log z = \log (y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

Osservazione: è giusto che dato $y > 1$ esistano 2 valori di x (la funzione è pari). Quello che interessa è quello con il $+$. Quindi

$$\operatorname{seth} \cosh y = \log (y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Esercizio Trovare formule analoghe per $\text{Settsin} y$ e $\text{Sett} \tan y$.

Esercizio Trovare analoghi dei limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
Trovare anche gli sviluppi di $\sinh x$ e $\cosh x$.

Significato geometrico Trigonometria normale:

prendo $x^2 + y^2 = 1$, prendo un p.to P che corrisponde ad un arco lungo α , e allora

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Variante: prendo $x^2 + y^2 = 1$, prendo P in modo che l'area del settore sia $\frac{\alpha}{2}$.

Allora

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Versione iperbolica: prendo $x^2 - y^2 = 1$ e prendo P in modo che l'area del settore sia $\frac{\alpha}{2}$. Allora

$$P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$$

Oss. fisica Un filo tra 2 pali è un $\cosh$

