

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 031

Titolo nota

19/10/2011

Teorema di De L'Hôpital Consideriamo un limite del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad x_0 \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Supponiamo 3 set di ipotesi:

(i) ipotesi burocratiche (esistenza di f', g' , denominatori $\neq 0, \dots$)

(ii) il limite in questione sia del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad (\text{stesso } L).$$

Utilizzo operativo

1 - Devo fare il limite del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$

2 - Se è $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ posso provare ad applicare Hôp. (se non è così, bastano i trucchi algebrici)

3 - Provo quindi a calcolare il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ci sono vari casi

3.1 - Se questo esiste ed è un certo $L \in \bar{\mathbb{R}}$, allora so fare il limite originario

3.2 - Se questo non esiste, allora BOH (cioè non si può dire nulla su quello originario)

3.3 - Se questo è ancora una forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, posso reiterare e provare a calcolare il limite di $\frac{f''(x)}{g''(x)}$, e così via con le derivate successive.

Achtung! Hôp non dice nulla

- se la forma non è $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- se il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste.

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{1} = 0$
 (Hôpital's rule applied to the original limit, not the derivative)

No! Non è una formula $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite viene $+\infty$!!!

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x}$ Controllo numeratore e denominatore.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin x = +\infty$ ($2x + \sin x \geq 2x - 1$)

Essendo una forma $\frac{+\infty}{+\infty}$ posso applicare Hôp.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x} \stackrel{\text{Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{1} = \text{N.E.}$

No!! L'uguaglianza vale solo se il secondo limite esiste in $\overline{\mathbb{R}}$.
 Il limite originario in realtà esiste e vale 2:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$ $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

Esercizio Ha senso calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ con Hôp.?

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$

1° modo: percorso + limiti notevoli

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) + x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

2° modo: equivalenze asintotiche: $\sin x \sim x$

$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \sim \frac{x - x + x^5}{x^3} = x^2 \rightarrow 0$

3° modo: Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} & \underset{\substack{\uparrow \\ [0/0: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 5x^4}{3x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ [0/0: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 20x^3}{6x} \underset{\substack{\uparrow \\ [0/0: \text{Hôp}]}{=} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 60x^2}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Achtung! Il risultato corretto è il 3° modo.

- Nel 1° modo abbiamo fatto il limite mezza per volta: VIETATISSIMO
- Nel 2° modo emergono tutti i pericoli dell'equivalenza asintotica. Con o piccolo non sarebbe successo:

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} - (\cancel{x} + o(x)) + \boxed{x^5}}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} = \frac{o(x)}{o(x)} = \text{BOH}$$

— 0 — 0 —

L'utilità di Hôp. per il calcolo dei limiti è circa del 3%. Il motivo è che derivando spesso le funzioni peggiorano...

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3 + \sqrt{\arctan^7 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{x - \sin x + x^5}{x^3}} \cdot \boxed{\frac{x^3}{x^3 + o(x^3)}}$

$\sim x^{7/2}$ $\downarrow \frac{1}{6}$ $\downarrow 1$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \quad [= +\infty \cdot 0]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ [0/0: \text{Hôp}]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

— 0 — 0 —

Si può usare Hôpital per fare limiti di successioni? Sì, ma solo all'interno del criterio funzioni $\rightarrow$ successioni

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pongo } x=n}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1.$

Esempio $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \left[\frac{0}{0} \right]$ Num e den. hanno senso per $x \rightarrow 1^-$

Hôp
 $\downarrow$
$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{+\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \overset{(-1)}{\uparrow} \text{derivata di } -x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} \quad [\text{è ancora indeterminata } \frac{0}{0}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \sqrt{\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

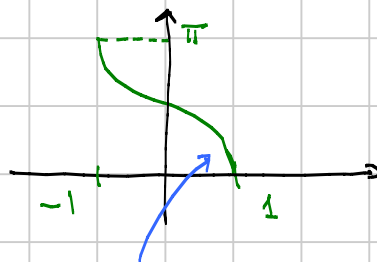
Oss. Ponendo $1-x=y$ abbiamo che $y \rightarrow 0^+$ ed il limite diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(1-y)}{\sqrt{y}} = \sqrt{2}$$

che detto altrimenti si può scrivere come

$$\arccos(1-y) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{y} + o(\sqrt{y}) \quad \text{per } y \rightarrow 0^+$$

(basta applicare la definizione di o piccolo "dividendo")



questo tratto è una specie di radice.