

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 030

Titolo nota

15/10/2011

Derivata della funzione inversa

Sia $f(x)$ una funzione e sia $g(x)$ la sua inversa. Questo vuol dire che

$$f(g(x)) = x \quad \forall x \in \text{insieme di definizione di } g.$$

Supponiamo di poter derivare a dx e sx. Otteniamo

$$[f(g(x))]^{\prime} = [x]^{\prime} \quad ; \quad f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

Supponiamo anche di poter dividere. Troviamo

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Derivata
funzione inversa

Esempio 1 $f(x) = e^x$ $g(x) = \log x$ Allora $f'(x) = e^x$

$$[\log x]^{\prime} = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $f(x) = \tan x$ $g(x) = \arctan x$. Calcolo $f'(x)$

$$\begin{aligned} [\tan x]^{\prime} &= \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]^{\prime} = \frac{[\sin x]^{\prime} \cdot \cos x - [\cos x]^{\prime} \cdot \sin x}{\cos^2 x} \\ &\quad \uparrow \text{regola quoziente} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\arctan x]^{\prime} &= g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ $g(x) = \arcsin x$ $f'(x) = \cos x$

$$[\arcsin x]' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\alpha})}$$

Ora $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, quindi

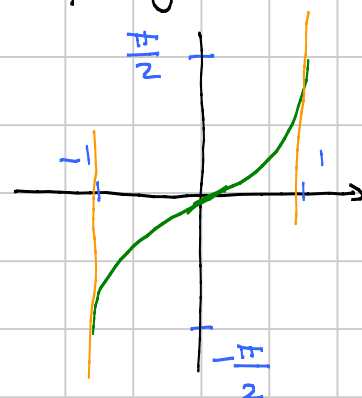
$$\frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Achtung! La formula $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ non vale per ogni α (ci vorrebbe un $+$ o un $-$). Vale con il segno $+$ quando α sta nel I e IV quadrante. Io uso la formula con $\alpha = \arcsin x$ e fortunatamente $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, quindi nei quadranti giusti.

Oss. La funzione $\arcsin x$ è definita e continua per ogni $x \in [-1, 1]$.

Tuttavia è derivabile solo per $x \in (-1, 1)$.

In $x = \pm 1$ la tangente al grafico "ha coeff. angolare $+\infty$ ", quindi è verticale



Esercizio Fare le stesse considerazioni per ricavare la derivata di $\arccos x$.

Derivate di x^k con k intero. Per $k = 0, 1, 2$ si fa facilmente con la definizione (1° o 2° modo). Poi si procede per induzione

Dim. Passo base $k = 2$ già fatto.

$k \Rightarrow k+1$ Ipotesi: $[x^k]' = k \cdot x^{k-1}$

Tesi: $[x^{k+1}]' = (k+1) \cdot x^k$

Dim. P.I.: $[x^{k+1}]' = [x \cdot x^k]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} [x]' \cdot x^k + x \cdot [x^k]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deriv. prodotto}}}{=} 1 \cdot x^k + x \cdot [x^k]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ipotesi}}}{=} 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = (k+1) \cdot x^k$

— o — o —

Derivata di x^α con $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [e^{\alpha \log x}]' = e^{\alpha \log x} \cdot [\alpha \log x]' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} \\ &= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Derivata funzione composta Pongo $\varphi(x) = f(g(x))$

Ipotesi: g derivabile in x_0 : $g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$ per $h \rightarrow 0$

f derivabile in $g(x_0)$: $f(g(x_0)+k) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot k + o(k)$ per $k \rightarrow 0$

Allora

$$\begin{aligned} \varphi(x_0+h) &= f(g(x_0+h)) \\ &= f(g(x_0) + \underbrace{g'(x_0) \cdot h + o(h)}_k) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot \underbrace{[g'(x_0)h + o(h)]}_k + o(\underbrace{g'(x_0) \cdot h + o(h)}_k) \\ &= \underbrace{f(g(x_0))}_{\varphi(x_0)} + \underbrace{f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)}_{\varphi'(x_0)} \cdot h + o(h) \end{aligned}$$

$\downarrow$ mangia $f'(g(x_0)) \cdot o(h)$
 $o(g'(x_0) \cdot h) + o(o(h))$

— o — o —

Esercizio 1

$f(x) = x^2 \cos x$ PRODOTTO

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2]' \cdot \cos x + x^2 \cdot [\cos x]' \\ &= 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) \\ &= 2x \cos x - x^2 \sin x \end{aligned}$$

Esercizio 2

$f(x) = \cos(x^3)$

COMPOSIZIONE con funzione
esterna $\cos x$ e interna x^3

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x^3 \cdot 3x^2 \\ &= -3x^2 \sin x^3 \end{aligned}$$

Esercizio 3

$f(x) = \cos^3 x$

COMPOSIZIONE con funzione
esterna x^3 e interna $\cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \\ &= -3 \cos^2 x \sin x \end{aligned}$$

Esercizio 4

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(e^x)}$$

$$f'(x) = - \frac{[\sin^2(e^x)]'}{\sin^4(e^x)} = - \frac{2 \sin e^x \cdot \cos e^x \cdot e^x}{\sin^4(e^x)}$$

$$= - \frac{2 e^x \cdot \cos e^x}{\sin^3 e^x}$$

Alternativa: $f(x) = \sin^{-2}(e^x)$

$$f'(x) = -2 \cdot \sin^{-3}(e^x) \cdot \cos(e^x) \cdot e^x$$

Esercizio 5

$$f(x) = (\arctan x)^{\sin x} \quad \dots \quad \text{più semplice } f(x) = x^x$$

Possibilità 1: visto come x^x viene $x \cdot x^{x-1}$

Possibilità 2: visto come x^x viene $x^x \cdot \log x$

Stagliate tutte e 2,
perché valgono solo
quando x è costante

Possibilità corretta: $x^x = e^{x \log x}$, quindi

$$[x^x]' = [e^{x \log x}]' = e^{x \log x} \cdot [x \log x]' = e^{x \log x} [\log x + x \cdot \frac{1}{x}]$$

$$= x^x [\log x + 1]$$

Allo stesso modo:

$$[(\arctan x)^{\sin x}]' = [e^{\sin x \cdot \log(\arctan x)}]'$$

$$= e^{\sin x \cdot \log(\arctan x)} \cdot \{ \cos x \cdot \log(\arctan x) + \sin x \cdot [\log(\arctan x)]' \}$$

$$= (\arctan x)^{\sin x} \left\{ \cos x \cdot \log(\arctan x) + \sin x \cdot \frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right\}$$

— o — o —