

Derivate di alcune funzioni elementariEsempio 1 $f(x) = x^2$. Calcolo $f'(x_0)$

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ modo: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + \cancel{h^2} - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0 = f'(x_0) \end{aligned}$$

Quindi $f'(x) = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$2^\circ \text{ modo: } f(x_0+h) = (x_0+h)^2 = \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + \underbrace{2x_0}_{\text{il coeff. di } h \text{ è proprio } f'(x_0)} h + \underbrace{h^2}_{o(h)}$$

Esempio 2 $f(x) = e^x$ (non risulterà $f'(x) = e^x$)

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ modo: } f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_1 = e^{x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ modo: } f(x_0+h) &= e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h = \text{(uso sviluppo di } e^h) \\ &= e^{x_0} (1 + h + o(h)) \\ &= e^{x_0} + e^{x_0} h + e^{x_0} \cdot o(h) \\ &= \underbrace{e^{x_0}}_{f(x_0)} + \underbrace{e^{x_0}}_{\text{il coeff. di } h \text{ è } f'(x_0)} h + o(h) \end{aligned}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ (risulterà $f'(x) = \cos x$)

1° modo: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$

(2 possibili strade: usare formula per $\sin \alpha - \sin \beta$,
oppure usare formula per $\sin(\alpha+\beta)$: uso questa!)

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x_0 \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h \cdot h}}_{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{h}_{0} + \cos x_0 \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_1 \right) = \cos x_0 \end{aligned}$$

2° modo: $f(x_0+h) = \sin(x_0+h)$

$$= \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h \quad (\text{uso sviluppi})$$

$$= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 \cdot (h + o(h))$$

$$= \sin x_0 + \sin x_0 \cdot o(h) + \cos x_0 \cdot h + \cos x_0 \cdot o(h)$$

$$= \sin x_0 + \underbrace{\cos x_0}_{f'(x_0)} \cdot h + o(h) \quad \leftarrow \text{il coeff. di } h \text{ è } f'(x_0).$$

Esercizio Fare nei due modi la derivata di $f(x) = \cos x$ (viene $f'(x) = -\sin x$)

Esempio 4 $f(x) = \log x$ ($\leadsto$ viene $f'(x) = \frac{1}{x}$) (si intende $x > 0$)

1° modo: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0} \cdot x_0} = \frac{1}{x_0} \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad 1 \quad \left(\text{pongo } y = \frac{h}{x_0}\right) \end{aligned}$$

2° modo: $f(x_0+h) = \log(x_0+h) = \log\left[x_0\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right] = \log x_0 + \log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)$

$$= \log x_0 + \underbrace{\frac{h}{x_0}}_{f'(x_0)} + o(h) \quad \leftarrow \text{il coeff. è } f'(x_0).$$

Regole di derivazione Detto brutalmente

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda f' \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ costante})$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tabellina di derivate delle funzioni elementari

$$(\text{costante})' = 0$$

$$[x^k]' = k x^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

— o — o —

Derivata della somma Pongo $\varphi(x) = f(x) + g(x)$

$$1^\circ \text{ modo: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right] = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$2^\circ \text{ modo: per ipotesi } f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

Sommando:

$$\varphi(x_0+h) = \underbrace{[f(x_0) + g(x_0)]}_{\varphi(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)] \cdot h}_{\varphi'(x_0) \cdot h} + o(h)$$

Derivata del prodotto

Pongo $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} \text{ modo: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0+h) \cdot g(x_0) + f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{f(x_0+h)}_{f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)} + \underbrace{g(x_0)}_{g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \right] \\
 &= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)
 \end{aligned}$$

2° modo: ipotesi $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$
 $g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_0+h) &= f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) = (\text{devo moltiplicare le 2 righe}) \\
 &= \boxed{f(x_0) \cdot g(x_0)} + f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot h + f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h + o(h) \\
 &= f(x_0) + \underbrace{[f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)] \cdot h}_{\text{il coeff. è } \varphi'(x_0)} + o(h)
 \end{aligned}$$

mangia i termini
con $o(h), h^2, h \cdot o(h),$
 $o(h) \cdot o(h)$

Derivata di $\frac{1}{f}$

Pongo $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)}}_{\frac{1}{[f(x_0)]^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{g}{f}\right)' &= \left[g \cdot \frac{1}{f}\right]' = g' \cdot \frac{1}{f} + g \cdot \left[\frac{1}{f}\right]' \\
 &= g' \cdot \frac{1}{f} + g \cdot \left(-\frac{f'}{f^2}\right) = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2}
 \end{aligned}$$