

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 028

Titolo nota

15/10/2011

Def. Sia $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $h \neq 0$. Si definisce rapporto incrementale la frazione

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\text{incremento della variabile } y}{\text{incremento della variabile } x}$$

Quando passo da x_0 a x_0+h , la variabile x si muove di h , la variabile y si muove da $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$, quindi il suo incremento è pari al numeratore della frazione,

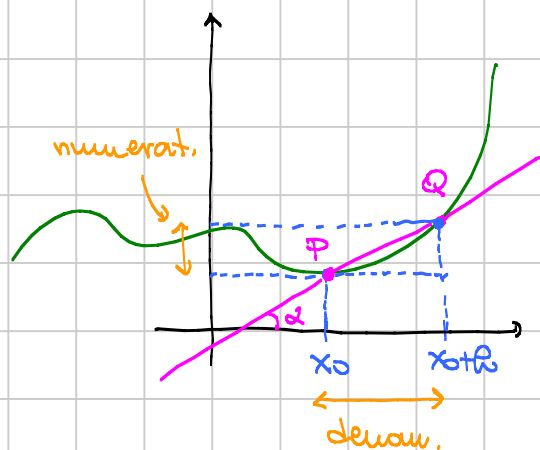
Significato geometrico

Detti P e Q i p.ti del grafico corrispondenti a x_0 e x_0+h , cioè

$$P = (x_0, f(x_0)), \quad Q = (x_0+h, f(x_0+h))$$

si ha che

$$\begin{aligned} \text{rapp. incrementale} &= \text{coeff. angolare retta } PQ \\ &= \tan \alpha \end{aligned}$$



Def. Si dice che $f(x)$ è derivabile nel p.to x_0 se esiste ed è in $\mathbb{R}$ il limite del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$, cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad f^{(1)}(x_0), \quad \dot{f}(x_0)$$

Osservazione Se $f(x)$ è derivabile per ogni x in un certo insieme, posso considerare la funzione derivata, cioè quella che ad ogni x_0 e insieme associa $f'(x_0)$

Derivate successive. Facendo la derivata della derivata si ottiene la derivata 2^a, e così via.

Possibili notazioni:

$$f''(x_0),$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0),$$

$$f^{(2)}(x_0),$$

$$f''(x_0)$$

⋮

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x_0),$$

$$f^{(k)}(x_0),$$

⋮

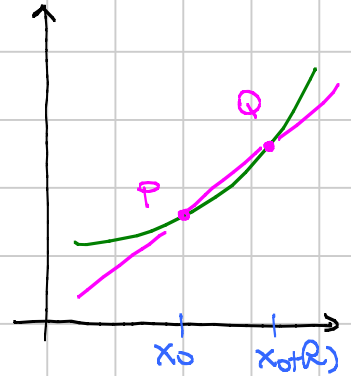
Significato geometrico

Quando $h \rightarrow 0$, il p.to Q tende al p.to P,
La retta PQ tende alla retta tangente al
grafico in P, quindi

$$\text{rapp. increment.} = \text{coeff. ang. retta PQ}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$
$$f'(x_0) = \text{coeff. ang. retta tangente in P}$$

Quindi la derivata in x_0 è il coeff. angolare della retta tangente
al grafico nel p.to $P = (x_0, f(x_0))$.



Equazione retta tangente Si tratta di scrivere l'eq. della retta che
passa per P e ha coeff. ang. $f'(x_0)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Stessa definizione in termini di o piccolo

Dire che esiste la derivata $f'(x_0)$ in un p.to x_0 è la stessa cosa
che dire che vale questa formula

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

"Dim." Supponiamo che sia vera la scrittura con o piccolo.

Dimostro che esiste il limite del rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f'(x_0) \cdot h + o(h)}{h} = f'(x_0) + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{\rightarrow 0} \rightarrow f'(x_0)$$

Viceversa: supponiamo che esista il limite del rapp. increment., cioè

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Dimostro che vale la scrittura con o piccolo, cioè

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h = o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Per dim. divido per h e passo al limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Significato geometrico scrittura con o piccolo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$$AD = AB + BC + CD$$

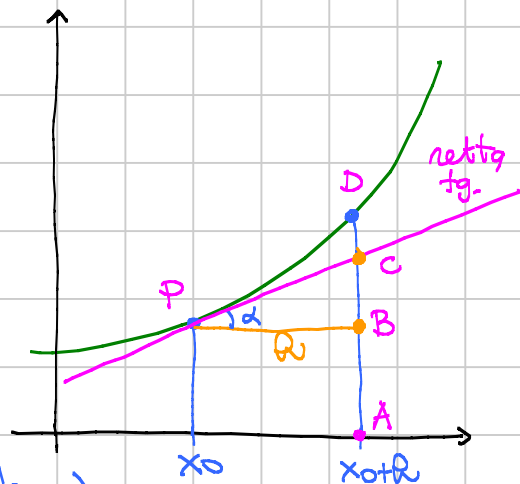
Nella figura

$$AD = f(x_0+h)$$

$$AB = f(x_0)$$

$$BC = f'(x_0) \cdot h \quad (\text{formula per i triangoli})$$

$$\text{rettangoli: } \frac{BC}{PB} = \tan \alpha = f'(x_0)$$



Cosa succede quando $h \rightarrow 0$?

- AB resta fisso (si sposta, ma la sua lunghezza non varia)
- $BC \rightarrow 0$ linearmente rispetto ad h (se dimezzo h , dimezzo anche BC)
- $CD \rightarrow 0$ più velocemente di h , cioè è $o(h)$.

Teorema Se $f(x)$ è derivabile in x_0 , allora $f(x)$ è continua in x_0 .

Dim. Devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Per farlo pongo $h = x - x_0$.

Quando $x \rightarrow x_0$ ho che $h \rightarrow 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{0} + f(x_0) \right] = f(x_0).$$

Oss. Non vale il viceversa, cioè una funzione può essere continua, ma non derivabile, in un pto x_0 .

Esempio classico $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

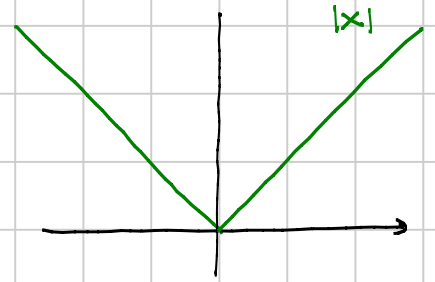
(andando a 0^+ la retta tangente avrebbe coeff. ang. = 1)

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

(ora $h < 0$ perché $h \rightarrow 0^-$, quindi $|h| = -h$).

(andando a 0^- , la retta tangente avrebbe coeff. ang. = -1).



— 0 — 0 —