

O piccolo — O grande — Equivalenza asintotica
 ↓
 futuro

Def. Siano $f(x)$, $g(x)$, x_0 come nella definizione di o piccolo.
Si dice che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$,
e si scrive

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste $\omega(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$$

Def. quasi equivalente. Quando posso dividere si ha che $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Sviluppini con equivalenza asintotica Per $x \rightarrow 0$ si ha che

$$\begin{array}{cccc} \sin x \sim x & \tan x \sim x & \arctan x \sim x & \operatorname{arcsin} x \sim x \\ \log(1+x) \sim x & e^x - 1 \sim x & \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} & \end{array}$$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \tan x}{e^x - 1 + 3 \arctan x} = \frac{3}{4}$

$$\sin x \sim x, \quad 2 \tan x \sim 2x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 3 \arctan x \sim 3x$$

Frazione $\sim \frac{3x}{4x} \sim \frac{3}{4}$

Tecnica classica:

$$\frac{x \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \frac{\tan x}{x} \right)}{x \left(\frac{e^x - 1}{x} + 3 \frac{\arctan x}{x} \right)} \rightarrow \frac{1+2}{1+3}$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 2}{\cos x - 1} = +\infty$ [$\frac{-1}{0^-}$: non è una forma indeterminata]

Al denominatore c'è 0^- perché $\cos x - 1 \leq 0$ sempre
Cosa succedeva facendolo con 0 piccolo:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + o(\sin x) = 1 + x + o(x) + o(x) = 1 + x + o(x)$$

$$e^t = 1 + t + o(t)$$

$$o(\sin x) = o(x + o(x)) = o(x) + o(o(x)) = o(x) + o(x) = o(x)$$

Numeratore: $e^{\sin x} - 2 = 1 + x + o(x) - 2 = -1 + x + o(x)$ e da qui mi accorgo che il numeratore tende a -1 .

Denominatore: $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Frazione: $\frac{-1 + x + o(x)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-1 + x + o(x)}{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}$
↓ $\frac{1}{0^+} = +\infty$ ↓ $\frac{0}{0}$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\arcsin(2x)}$

Numeratore: $e^x - \cos x - x$
 $= [\cancel{1} + \cancel{x} + o(x)] - [\cancel{1} + o(x)] - \cancel{x} = o(x)$

Denominatore: $\arcsin(2x) = 2x + o(x)$

Frazione: $\frac{o(x)}{2x + o(x)} = \frac{o(x)}{x(2 + \frac{o(x)}{x})} = \frac{\frac{o(x)}{x}}{2 + \frac{o(x)}{x}} \rightarrow 0$
↓ $\frac{0}{0}$ ↓ $\frac{0}{0}$

Achtung! Se alla fine resta $\frac{o(x)}{o(x)}$, allora non si può dire nulla.

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x + \arctan(x^3) + \arcsin(2x)}{e^{3 \tan x} - 1} = \frac{2}{3}$

Fatto generale: tutte le potenze con esponente > 1 sono "mangiate" da $o(x)$. Detto altrimenti

$$\arcsin(2x) = 2x + o(x)$$

$$\arctan(x^3) = x^3 + o(x^3) = o(x) + o(x) = o(x)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$(\sin x)^4 = x^4 + o(x^4) \quad \text{Perché?}$$

Usiamo la definizione: devo dim. che $(\sin x)^4 - x^4 = o(x^4)$

Divido:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^4 - x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Quindi numeratore $= 2x + o(x)$

Denominatore $= 3x + o(x) \dots$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{\arctan x} = \left[\frac{+\infty}{\frac{\pi}{2}} \right] = +\infty$

In questo limite $x \rightarrow +\infty$, quindi non posso usare gli sviluppi che sono per $x \rightarrow 0$!!!

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \frac{3}{n} \cdot (\sqrt[n]{3} - 1)^{-1}$

$\arctan \frac{3}{n} \cdot (3^{\frac{1}{n}} - 1)^{-1}$ Pongo $x = \frac{1}{n}$. Quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $x \rightarrow 0$

Otengo $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(3x) \cdot (3^x - 1)^{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{3^x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{e^{x \log 3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{\cancel{1} + x \log 3 \cancel{-1} + o(x)} = \frac{3}{\log 3}$$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]^{\frac{1}{\tan(\sin(2x^2))}}$

Lo scrivo come
$$e^{\frac{\log(\cos x)}{\tan(\sin(2x^2))}}$$

Considero il solo esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\tan(\sin(2x^2))}$$

Denominatore: $2x^2 + o(x^2)$

$$\begin{aligned} \tan(\sin(2x^2)) &= \sin(2x^2) + o(\sin(2x^2)) \\ &= 2x^2 + o(2x^2) + o(2x^2 + o(2x^2)) \\ &= 2x^2 + o(x^2) + o(2x^2 + o(x^2)) \\ &= 2x^2 + o(x^2) + o(x^2) + o(o(x^2)) \dots \end{aligned}$$

Numeratore: $\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$$\log(1+t) = t + o(t)$$

$$\text{con } t = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{Frazione} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{x^2 \dots}{x^2 \dots} \rightarrow -\frac{1}{4}$$

Poiché esponente $\rightarrow -\frac{1}{4}$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \text{originario} = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.