

ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 026

Titolo nota

14/10/2011

Applicazioni di o piccolo al calcolo di limiti

SVILUPPI Per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$\sin x = x + o(x)$ Devo dimostrare che $\sin x - x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Utilizzo la def. quasi equivalente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Allo stesso modo si dimostrano gli sviluppi di $\tan x$, $\arctan x$, $\arcsin x$.

$e^x = 1 + x + o(x)$ Devo dimostrare che $e^x - 1 - x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Dividendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

Anche $\log(1+x)$ si fa allo stesso modo.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ Devo dim. che $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2)$

Dividendo:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$\cos x = 1 + o(x)$ Devo dimostrare che $\cos x - 1 = o(x)$

Uso banalmente la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot x = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Alternativa: parto dal precedente $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad o(x) \quad o(o(x)) = o(x) \\ & = 1 - o(x) + o(x) = 1 + o(x) \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\sin(3x) = 3x + o(x)$

Sappiamo che $\sin x = x + o(x)$, cioè $\sin x = x + x \omega(x)$

Allora $\sin(3x) = 3x + \boxed{3x \cdot \omega(3x)} = 3x + x \omega_1(x)$

$\omega_1(x) \downarrow 0$

Esempio 2 $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$

Sappiamo che $\sin x = x + x \cdot \omega(x)$, quindi $\sin x^2 = x^2 + x^2 \cdot \boxed{\omega(x^2)}$

$\omega_1(x) \rightarrow 0$

Esempio 3 $\sin(x^2) = x^2 + o(x)$

1° modo: come prima $\sin x^2 = x^2 + x^2 \cdot \omega(x^2) = x^2 + x \cdot \boxed{x \omega(x^2)}$

$\omega_1(x) \rightarrow 0$

2° modo: come prima $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) = x^2 + o(o(x))$

$$= x^2 + o(x)$$

Osservazione: $\sin(x^2) = x^2 + o(x) = o(x) + o(x) = o(x)$

Esempio 4 $\sin(\arctan x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Sappiamo che $\sin x = x + x \cdot \omega(x)$, quindi

$$\begin{aligned} \sin(\arctan x) &= \arctan x + \arctan x \cdot \omega(\arctan x) \\ &= x + o(x) + x \cdot \boxed{\frac{\arctan x}{x} \cdot \omega(\arctan x)} \\ & \quad \quad \quad \omega_1(x) \rightarrow 0 \\ &= x + o(x) + o(x) \\ &= x + o(x) \end{aligned}$$

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\tan x + 2 \arcsin x}$

Uso gli sviluppi:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\text{Numeratore} = \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - o(x) = x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$\text{Denominatore: } x + o(x) + 2x + 2o(x) = 3x + o(x)$$

$$\text{Frazione} = \frac{x + o(x)}{3x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(3 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Vecchia maniera:

$$\frac{e^x - \cos x}{\tan x + 2 \arcsin x} = \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x}{\tan x + 2 \arcsin x} = \frac{x \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x \right)}{x \left(\frac{\tan x}{x} + 2 \frac{\arcsin x}{x} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x) - 2 \arctan(5x)}{\tan(2x) + e^{3x} - 1} = -\frac{7}{5}$

$$\log(1+3x) = 3x + o(x)$$

$$\arctan(5x) = 5x + o(x)$$

$$\text{Num} = 3x + o(x) - 10x - 2o(x) = -7x + o(x)$$

$$\tan(2x) = 2x + o(x)$$

$$e^{3x} = 1 + 3x + o(x)$$

$$\text{Denom} = 2x + o(x) + \cancel{1} + 3x + o(x) - \cancel{1} = 5x + o(x)$$

$$\text{Frazione} = \frac{-7x + o(x)}{5x + o(x)} = \frac{\cancel{x} \left(-7 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(5 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow -\frac{7}{5}$$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x + \sin x} - 1}{\arctan(\arcsin(3x))} = \frac{2}{3}$

Brutale: $\text{Frazione} \sim \frac{e^{2x} - 1}{\arctan(3x)} \sim \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \frac{\cancel{1} + 2x + \cancel{1}}{3x} = \frac{2}{3}$

$e^{x+\sin x}$. Sappiamo che $e^t = 1+t+o(t)$, quindi

$$e^{x+\sin x} = 1 + x + \underbrace{\sin x}_{x+o(x)} + o(x+\sin x)$$

$$o(x+\sin x) = o(x+x+o(x)) = o(2x+o(x)) \stackrel{?}{=} o(2x) + o(o(x)) \\ = o(x) + o(x) = o(x)$$

Domanda: $o(\text{somma}) = \text{somma degli } o \text{ piccolo}$.

Cioè: se $f(x) = o(g_1(x) + g_2(x))$, possiamo dire che
 $f(x) = o(g_1(x)) + o(g_2(x))$?

Dim.: $f(x) = o(g_1(x) + g_2(x))$ vuol dire
 $f(x) = \{g_1(x) + g_2(x)\} \cdot w(x)$ con $w(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$
 $= g_1(x) \cdot w(x) + g_2(x) \cdot w(x)$
 $= o(g_1(x)) + o(g_2(x))$

$$\arctan(\arcsin(3x)) = \arcsin(3x) + o(\arcsin(3x))$$

$\uparrow$
uso $\arctan t = t + o(t)$

$$\begin{aligned} &= 3x + o(3x) + o(x + o(3x)) \\ &= 3x + o(x) + o(x + o(x)) \\ &= 3x + o(x) + o(x) + o(o(x)) \\ &= 3x + o(x) + o(x) + o(x) \\ &= 3x + o(x) \end{aligned}$$