

0 PICCOLO

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, siano $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si dice che $f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

Detto altrimenti, $f(x) = g(x) \cdot \text{qualcosa che tende a } 0 \text{ per } x \rightarrow x_0$.

Def. quasi equivalente Supponiamo di poter dividere per $g(x)$, cioè $g(x) \neq 0$ per valori di x vicini ad x_0 (tranne al più in x_0). Allora si ha che $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{Dim. equivalente: ricavare } w(x))$$

Brutale: se supponiamo che $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$, allora $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una forma indebita $\frac{0}{0}$. Il fatto che $f(x) = o(g(x))$ diventa equivalente a dire che "f batte g".

Esempi In tutti gli esempi prendiamo $x_0 = 0$.

$$x^2 = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

1° modo

$$x^2 = \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g(x)}}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

2° modo Divido per $g(x)$ come nella def. quasi equivalente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

— 0 — 0 —

$$\underset{f(x)}{\arctan x^3} = o(\underset{g(x)}{x^2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

1° modo: $\underset{f(x)}{\arctan x^3} = \underset{g(x)}{x^2} \cdot \underset{w(x)}{\frac{\arctan x^3}{x^2}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\arctan x^3}{x^3}} \cdot \boxed{x} = 0$$

2° modo: divido e ottengo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^3}{x^2} = \dots = 0$.

$$\boxed{\frac{1}{x}} = o\left(\boxed{\frac{1}{x^4}}\right) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

2° modo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$.

N.B. In questo esempio $f(x)$ e $g(x)$ non tendono a 0 per $x \rightarrow x_0 = 0$.

Proprietà di o piccolo Supponiamo

$$f_1(x) = o(g(x))$$

$$f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Cosa possiamo dire di $f_1 \pm f_2$ $f_1 \cdot f_2$ f_1/f_2 ?

Ipotesi: $f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x)$

$$f_2(x) = g(x) \cdot w_2(x)$$

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{\{w_1(x) + w_2(x)\}}_{= w_3(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \boxed{w_1(x)} + \boxed{w_2(x)} = 0$$

Questo mostra che $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$. Allo stesso modo
 $f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$

Prodotto: $f_1(x) \cdot f_2(x) = [g(x)]^2 \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_3(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) \cdot w_2(x) = 0 \cdot 0 = 0$$

Questo dice che $f_1(x) \cdot f_2(x) = o([g(x)]^2)$ per $x \rightarrow x_0$.

Quoziente: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot w_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot w_2(x)} = \frac{w_1(x)}{w_2(x)} = w_3(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w_1(x)}{w_2(x)} = \frac{0}{0} = \text{Boh !!}$ Non si può dire nulla

Brutalmente: f_1 batte g , f_2 batte g , ma questo non permette di confrontare f_1 ed f_2 .

Notazione rapida: $o(g) + o(g) = o(g)$, $o(g) - o(g) = o(g)$
 $o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$, $\frac{o(g)}{o(g)} = \text{Boh}$

Moltiplicazione per costante: se $f(x) = o(g(x))$, allora $\exists f(x) = o(g(x))$

Dim.: $f(x) = g(x) \cdot w(x)$, allora $\exists f(x) = g(x) \cdot \underbrace{\exists w(x)}_{w_1(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} w_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \exists w(x) = \exists \cdot 0 = 0,$

Costante dentro: se $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow 0$, allora
 $f(\exists x) = o(g(\exists x))$ per $x \rightarrow 0$

Dim.: $f(x) = g(x) \cdot w(x)$, allora $f(\exists x) = g(\exists x) \cdot \underbrace{w(\exists x)}_{w_1(x) \dots}$
— 0 — 0 —

Composizione di o piccolo

Se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(h(x))$, allora $f(x) = o(h(x))$

Dim.: $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot w_1(x) \quad w_1(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0$
 $g(x) = o(h(x)) \Leftrightarrow g(x) = h(x) \cdot w_2(x) \quad w_2(x) \rightarrow 0 \quad "$

Ma allora

$f(x) = g(x) \cdot w_1(x) = h(x) \cdot \underbrace{w_2(x) \cdot w_1(x)}_{w_3(x)}$

e $w_3(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$

$[o(o(h)) = o(h)]$

Esempio 1 Quando si ha che $x^k = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$?

2° modo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^k}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{k-2} = 0$

se e solo se $k > 2$

Esempio 2 $\sin x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

2° modo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x = 0$

Esempio 3 $\sin^2(x^2) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

2° modo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^2)}{x^4} \cdot x^3$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x^2}{x^2} \right]^2 \cdot x^3 = 1^2 \cdot 0 = 0.$

Alternativa: sappiamo che $\sin(x^2) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$
Moltiplicando (o elevando al quadrato) ottengo

$$\sin^2(x^2) = o(x^2) = o(x)$$

↓ per via dell'esempio 1.

Esempio 4 Supponiamo $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Allora $f(\arctan x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

Dim.: $f(x) = o(x)$ vuol dire che $f(x) = x \cdot w(x)$. Allora

$$f(\arctan x) = \arctan x \cdot w(\arctan x) = x \cdot \underbrace{\frac{\arctan x}{x} \cdot w(\arctan x)}_{w_1(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w_1(x) = 1 \cdot 0 = 0, \text{ quindi } f(x) = o(x).$$