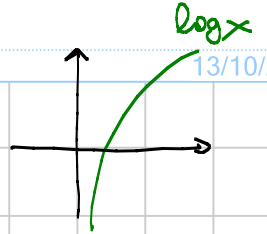


ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 024

Titolo nota

13/10/2011

Esercizio 1 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\log(1+x)}{x} = \left[\frac{-\infty}{-1} \right] = +\infty$



La funzione è definita per $x \neq 0$ e $1+x > 0$, cioè $x > -1$. Quindi è definita in $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Quindi ha senso fare il limite per $x \rightarrow -1^+$, ma non per $x \rightarrow -1$.

Esercizio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 0 \quad \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$

Brutale: $\frac{\log(1+x)}{x} \sim \frac{\log x}{x} \rightarrow 0$ perché log cresce delle potenze

Rigoroso: $\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{\log \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{x} = \frac{\log x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x}$

$$= \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{(tabellina)}}} + \underbrace{\frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x}}_{\downarrow 0} \quad \left[\frac{\log 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0 \right]$$

Esercizio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^3)}{\log(1+3x^2 \sin x)} = \frac{1}{3} \quad \left[= \frac{0}{0} \right]$

$$\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+3x^2 \sin x)} = \underbrace{\frac{\log(1+x^3)}{x^3}}_{\substack{\downarrow y=x^3 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{3x^2 \sin x}}_{\substack{\downarrow \frac{1}{3}}} \cdot \underbrace{\frac{3x^2 \sin x}{\log(1+3x^2 \sin x)}}_{\substack{\downarrow y=3x^2 \sin x \\ 1}}$$

Esercizio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)}$

$$\underbrace{\frac{\log(1+x^3)}{x^3}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{x^2}}_{\downarrow +\infty} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\log(1+x^2)}}_{\downarrow 1}$$

NO!!! I limiti notevoli usati valgono per $x \rightarrow 0$, non per $x \rightarrow +\infty$!!!

Brutale: $\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)} \sim \frac{\log x^3}{\log x^2} = \frac{3 \log x}{2 \log x} \rightarrow \frac{3}{2}$

Rigoroso: $\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)} = \frac{\log \left[x^3 \left(\frac{1}{x^3} + 1 \right) \right]}{\log \left[x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \right]} = \frac{3 \log x + \log \left(\frac{1}{x^3} + 1 \right)}{2 \log x + \log \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}$

$= \frac{\cancel{\log x} \left[3 + \frac{\log \left(\frac{1}{x^3} + 1 \right)}{\log x} \right]}{\cancel{\log x} \left[2 + \frac{\log \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}{\log x} \right]} \rightarrow \frac{3}{2}$

$\downarrow$
 $\left[= \frac{\log 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0 \right]$

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3x^3}{4\sqrt{x} + 5x^3} = \frac{3}{5}$ (raccolgo x^3 sopra e sotto)

Brutale: $\frac{---}{---} \sim \frac{3x^3}{5x^3} \rightarrow \frac{3}{5}$

Esercizio 6 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} + 3x^3}{4\sqrt{x} + 5x^3} = \frac{1}{2}$

Brutale: $\frac{---}{---} \sim \frac{2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2}$

Rigoroso: raccolgo $\sqrt{x}$ sopra e sotto:

$\frac{2\sqrt{x} + 3x^3}{4\sqrt{x} + 5x^3} = \frac{\cancel{\sqrt{x}} \left[2 + 3x^2\sqrt{x} \right]}{\cancel{\sqrt{x}} \left[4 + 5x^2\sqrt{x} \right]} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\downarrow$
 0

Fatto generale: a $+\infty$ comandano le potenze di x con esponente più grande, a 0 comandano le potenze con esponente più piccolo.

Esercizio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\sin x} - \cos x}{\arctan(5x)} = \frac{2}{5}$ [$\frac{1-1}{0}$]

$$\frac{e^{x+\sin x} - \cos x}{\arctan(5x)} = \frac{e^{x+\sin x} - 1 + 1 - \cos x}{\arctan(5x)} =$$

$$= \frac{e^{x+\sin x} - 1 + 1 - \cos x}{5x} \cdot \frac{5x}{\arctan(5x)}$$

$$= \left(\frac{e^{x+\sin x} - 1}{5x} + \frac{1 - \cos x}{5x^2} \cdot x \right) \frac{5x}{\arctan(5x)}$$

$$= \left(\boxed{\frac{e^{x+\sin x} - 1}{x + \sin x}} \cdot \boxed{\frac{x + \sin x}{5x}} + \boxed{\frac{1 - \cos x}{5x^2}} \cdot \boxed{x} \right) \cdot \boxed{\frac{5x}{\arctan(5x)}} \rightarrow \frac{2}{5}$$

$y = x + \sin x \downarrow 1$
 $\downarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{\sin x}{x} \downarrow \frac{2}{5}$
 $\downarrow \frac{1}{10} \cdot 0$
 $\downarrow 1$

Esercizio 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 2}$ [$= \infty - \infty$]

Razionalizzazione: $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (\sqrt{A} - \sqrt{B}) \cdot \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$

$$(\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots}) \cdot \frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} = \frac{\cancel{x^2} + 3x + 1 - \cancel{x^2} - 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

Brutale: $\sim \frac{3x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{3x}{2x} \rightarrow \frac{3}{2}$

Rigrosso: raccolgo x sopra e raccolgo x^2 nelle radici

Esercizio 9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 3} - \sqrt[3]{x^4 + 4}$ [$+\infty - \infty$]

Se le radici sono di indice diverso, la razionalizzazione non è possibile.

Brutale: $\sqrt{x^3 + 3} - \sqrt[3]{x^4 + 4} \sim \sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{4}{3}} \rightarrow +\infty$

Rigoroso: raccogliere quello che bisogna...

Esercizio 10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+2} - \sqrt[3]{x^3}$

Come razionalizzare la differenza di 2 radici cubiche?

Achtung! $(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) \neq A - B$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Uso questa relazione con $a = \sqrt[3]{A}$ e $b = \sqrt[3]{B}$. Ottengo

$$A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \cdot (\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}). \text{ Quindi}$$

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \cdot \frac{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}$$

Nell'esercizio 10 si tratta di applicare questa formula con

$$A = x^3 + x^2 + 2 \text{ e } B = x^3 \dots$$

Oss. Con lo stesso metodo si tratta $\sqrt[k]{A} - \sqrt[k]{B} \dots$